



Etude de dégradation des voies ferrées urbaines

Si Hai Mai

► To cite this version:

Si Hai Mai. Etude de dégradation des voies ferrées urbaines. Autre. Université Paris-Est, 2011. Français. <NNT : 2011PEST1101>. <pastel-00659068>

HAL Id: pastel-00659068

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00659068>

Submitted on 12 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

**DOCTEUR DE
L'UNIVERSITE PARIS-EST**

Spécialité : *Structures et Matériaux*

Présentée par

Si Hai MAI

Sujet de la thèse :

Étude de dégradation des voies ferrées urbaines

Soutenue le 02 Mai 2011

Devant le jury composé de :

Y. Berthaud	<i>Président</i>
H. Maitournam	<i>Rapporteur</i>
C. Petit	<i>Rapporteur</i>
J.M. Torrenti	<i>Examineur</i>
F. Le-Corre	<i>Examineur</i>
G. Foret	<i>Co-directeur de thèse</i>
B. Nedjar	<i>Directeur de thèse</i>

Remerciements

Je tiens tout d’abord à remercier vivement **Boumediene Nedjar** pour toute la confiance qu’il m’a accordée en acceptant la responsabilité de la direction de ma thèse. Boumedienne fût au long de ce travail mon principal conseiller et interlocuteur. Son soutien m’a beaucoup aidé surtout pendant les moments de doute et d’incertitude. Qu’il trouve ici l’expression de ma profonde reconnaissance.

Je voudrais également remercier mon responsable chez ALSTOM Transport **Frédéric Le-Corre** pour son soutien, ses conseils et sa bonne humeur.

Je tiens à remercier **Gilles Foret** qui a participé à l’encadrement de ma thèse. Gilles fût mon principal conseiller et interlocuteur pour le travail expérimental qui constitue une partie très importante de ma thèse. Il m’a fait profiter notamment de son expérience, de ces compétences et de son savoir faire dans la conception et la réalisation des différents essais mécaniques. Je lui adresse ma sincère gratitude.

Mes vifs remerciements sont également adressés à Messieurs **Habibou Maitournam** et **Christophe Petit** pour avoir accepté la lourde tâche de rapporter mon mémoire et pour leur participation à mon jury.

Je tiens à remercier Monsieur **Yves Berthaud** qui m’a fait l’honneur de présider mon jury de thèse. Je remercie aussi Monsieur **Jean-Michel Torrenti** pour l’intérêt qu’ils m’ont manifesté pour ce travail en acceptant d’être membre de mon jury.

J’aimerais remercier tous les membres de l’équipe technique du laboratoire UR Navier qui ont participé à la campagne d’essais. En particulier, je remercie chaleureusement **Géraldine Vue** et **Daniel Cintra** pour leur participation au coulage des éprouvettes en béton et à la programmation du logiciel de pilotage des essais.

Mes remerciements vont aussi à **Alain Ehrlacher** et **Karam Sab** pour les diverses discussions que j’ai pu avoir avec eux. Ils m’ont fait profiter de leur vaste connaissance et m’ont souvent fasciné par leur rigueur, leur clarté d’esprit, leur enthousiasme et leur curiosité intellectuelle.

Cette thèse s'est déroulée successivement au sein de l'entreprise ALSTOM Transport et du laboratoire UR Navier. Je tiens à remercier tous mes collègues et mes amis pour l'ambiance chaleureuse, amicale et passionnée. Je remercie en particulier Karim Belmoumene, Lise Pesqueux, Laurent Brochard, Lina Bouhaya et Rana Elias pour leur amitié.

Enfin, je ne remercierais jamais assez mes parents, mon épouse et mon fils pour leur soutien inconditionnel et leur amour. Je leur dédie ce travail.

Résumé

Ce travail réalisé dans le cadre d'une collaboration industrielle avec la société ALSTOM Transport porte sur l'étude de la dégradation des voies ferrées urbaines. Les composantes de voie retenus pour cette étude sont le rail et la dalle de voie en béton.

Concernant le rail, différents problèmes sont abordés : contact roue – rail, usure du rail, usure ondulatoire du rail, et fatigue de contact de roulement (RCF) du rail. Un outil numérique avec des interfaces graphiques, nommé CONUS, est développé pour le problème de contact roue – rail et le problème d'usure du rail. Des théories classiques (Hertz, Kalker, Archard, etc.) sont implantées dans cet outil. La méthode stationnaire est implantée dans un code de calcul par éléments finis pour étudier l'état asymptotique de l'acier du rail sous le chargement répété des trains. Ceci nous permet de prédire les régimes de RCF du rail

La mécanique de l'endommagement est utilisée pour prédire la fatigue du matériau béton. Le formalisme de Marigo couplé avec le modèle d'endommagement de Mazars permet de modéliser la dégradation progressive de la rigidité du matériau sous chargement cyclique. Une campagne d'essais de fatigue du béton en flexion a été réalisée. Elle a pour but de valider le modèle théorique et d'identifier les paramètres du matériau. Le dimensionnement d'une dalle de voie en béton a fait l'objet d'une application de cette méthode.

Le modèle de réseau de poutres (lattice model) a été utilisé pour étudier la propagation des fissures dans les structures en béton. Ce modèle a été implanté dans le logiciel de calcul par éléments finis, CESAR-LCPC. Les résultats numériques (propagation de fissures) obtenus pour les structures simples sous chargement statique sont en tout point comparables avec les résultats d'essais expérimentaux. Ce modèle a ensuite été utilisé pour étudier la fissuration sous chargement de fatigue. Pour cela un modèle d'endommagement simple modélisant la dégradation des éléments «poutres» s'est avéré suffisant pour décrire la cinématique de propagation des fissures.

Mots - clés : dégradation des voies ferrées, contact roue – rail, usure du rail, usure ondulatoire du rail, fatigue de contact de roulement (RCF) du rail, endommagement du béton, fatigue du béton, théorie des équivalences, modèle de réseau de poutres (lattice model), essai de fatigue du béton.

Abstract

This work is part of the collaboration between the laboratory Navier (UMR ENPC /IFSTTAR/ CNRS) and ALSTOM Transport company (TGS/Trackway). It focuses on the study of the degradation of urban railways. The components of track considered in this study are the rail and the concrete slab.

Regarding the rail, different problems are discussed: wheel – rail contact, rail wear, rail corrugation and rolling contact fatigue (RCF). A numerical tool with graphical interfaces, called CONUS, is developed to predict the behaviour of the wheel - rail contact, the rail wear, and the rail corrugation problems. Classical theories (Hertz, Kalker, Archard, etc...) are implemented in this tool. The stationary method is implemented in a finite element software to study the asymptotic state of the rail steel under repeated loading of trains.

The damage mechanics is used to predict the fatigue life of concrete. Marigo's formalism coupled with Mazars' damage model is used to predict the gradual degradation of material stiffness under cyclic loading. A campaign of fatigue tests for concrete in bending was conducted. It aims at validating the theoretical model and identifying material parameters. We applied this method in order to design the concrete slabs of urban railway.

The lattice model was used to study the crack propagation in concrete structures. This model was implemented in the finite element software, CESAR-LCPC. The numerical results obtained for simple structures under static loading are consistent with the results of laboratory experiments. This model was then used to study the crack propagation under fatigue loading. For that purpose, a simple damage model of degradation of the "beams" elements describes the kinematics of crack propagation with a satisfying accuracy.

Keywords : track degradation, wheel – rail contact, rail wear, rail corrugation, rolling contact fatigue (RCF), concrete damage, fatigue of concrete, lattice model, concrete fatigue tests.

Table des matières

Partie 0 : Introduction générale	1
0.1. Contexte général	3
0.2. Système de la voie ferrée	4
0.3. Structure du rapport	5
Partie 1 : Usure et fatigue du rail.....	7
Introduction.....	9
Chapitre 1: Revue bibliographique - Usure et Fatigue du rail	11
1.1. Introduction	12
1.2. Contact roue - rail	13
1.2.1. Caractéristiques du contact roue - rail	13
1.2.2. Théories de contact.....	14
1.2.3. Méthodes de simulation du contact roue - rail	17
1.3. Usure du rail	18
1.3.1. Mécanisme d'usure abrasive	19
1.3.2. Lois d'usure.....	19
1.3.3. Méthode d'essai pour déterminer les paramètres de l'usure du rail	20
1.3.4. Méthodes de calcul de l'usure du rail.....	21
1.4. Usure ondulatoire du rail	21
1.4.1. Mécanismes de l'usure ondulatoire du rail.....	22
1.4.2. Différents types de l'usure ondulatoire du rail.....	23
1.4.3. Traitement de l'usure ondulatoire du rail	24
1.4.4. Méthodes de prédiction de l'usure ondulatoire du rail	25
1.5. Fatigue du contact roulant (RCF) du rail.....	26
1.5.1. Phénomène de fatigue de l'acier en général.....	26
1.5.2. Phénomène de fatigue du contact roulant (RCF) du rail	29
1.5.3. Modèles existants de prédiction de RCF du rail.....	32
1.6. Conclusion	38

Chapitre 2 : Développement des outils numériques – Usure et Fatigue du rail.....	39
2.1. Rappels théoriques.....	40
2.1.1. Efforts normaux du contact de Hertz.....	40
2.1.2. Efforts tangentiels	42
2.1.3. Calcul de l'usure abrasive	47
2.1.4. Modèle linéaire pour étudier l'usure ondulatoire	48
2.1.5. RCF du rail	53
2.2. Présentation de l'outil numérique CONUS	57
2.2.1. Problème de contact roue - rail.....	58
2.2.2. Problème d'usure abrasive du rail	61
2.2.3. Problème d'usure ondulatoire du rail	62
2.2.4. Problème de RCF du rail	63
Conclusions et perspectives	68
 Partie 2 : Fatigue des dalles ferroviaires en béton.....	 71
 Chapitre 3 : Revue bibliographique - Fatigue du béton	 73
3.1. Introduction	74
3.2. Matériau béton – Présentation générale.....	76
3.2.1. Constituants du béton	76
3.2.2. Comportements mécaniques typiques du béton	77
3.3. Matériau béton – approches empiriques pour la fatigue.....	80
3.3.1. Fatigue du béton : investigations expérimentales.....	80
3.3.2. Modélisations de la courbe de Wöhler pour le béton	82
3.4. Matériau béton – approches théoriques pour la fatigue.....	86
3.4.1. Application de la mécanique de l'endommagement pour étudier la fatigue du béton ...	86
3.4.2. Application de la mécanique de la rupture pour étudier la fatigue du béton	90
3.5. Conclusions	95
 Chapitre 4 : Endommagement par fatigue du matériau béton.....	 97
4.1. Introduction	98
4.2. Modèles théoriques.....	99
4.2.1. Théorie de l'endommagement.....	99
4.2.2. Formalisme de Marigo : endommagement par fatigue.....	102
4.2.3. Modèle d'endommagement de Mazars	103

4.2.4. Endommagement par fatigue.....	104
4.3. Résultats numériques	105
4.3.1. Fatigue sous chargements de compression.....	105
4.3.2. Fatigue sous chargement de traction	109
4.3.3. Fatigue sous chargement biaxial de traction - traction.....	111
4.4. Etude expérimentale de la fatigue du béton.....	114
4.4.1. Description de la procédure expérimentale	114
4.4.2. Présentation des résultats expérimentaux	118
4.5. Application – Dimensionnement des dalles ferroviaires en béton.....	122
4.5.1. Problématique.....	122
4.5.2. Modélisation 3D de la voie ferrée	123
4.5.3. Post-traitement en fatigue - Dimensionnement de la dalle.....	125
4.6. Conclusions	126
Chapitre 5 : Propagation des fissures du béton – Lattice model	127
5.1. Théorie des équivalences	128
5.1.1. Exposé général	128
5.1.2. Modèles de réseaux de barres.....	131
5.1.3. Modèles de réseaux de poutres.....	134
5.2. Implantation numérique.....	135
5.2.1. Présentation générale du code de calcul CESAR-LCPC.....	135
5.2.2. Algorithme pour le cas de chargements statiques	137
5.2.3. Algorithme pour le cas de chargement en fatigue	140
5.3. Propagation des fissures sous chargement statique	143
5.3.1. Flexion trois points symétrique	143
5.3.2. Flexion trois points dissymétrique	147
5.3.3. Flexion quatre points d'une poutre en béton armé	149
5.3.4. Cisaillement.....	150
5.3.5. Traction dissymétrique	151
5.4. Propagation des fissures par fatigue	152
5.5. Conclusions	155
Conclusions et Perspectives.....	157
Bibliographie	163

Partie 0

Introduction générale

0.1. Contexte général

La thèse qui fait l'objet de ce mémoire, s'est déroulée sous la forme d'une Convention Industrielle de Formation par la Recherche (CIFRE) et s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre le laboratoire Navier (UMR ENPC/IFSTTAR/CNRS) et l'unité Transport Global Solutions (TGS) / Voie Ferrée de l'entreprise ALSTOM Transport.

Cette étude a pour objet la mise en place d'outils et de méthodes de conception des voies ferrées urbaines (voies en béton). Dans ce but, nous nous sommes intéressés à plusieurs problématiques qui concernent la prévision de l'usure et de la fissuration par fatigue de la voie (le rail et la dalle de voie en béton). Etre en mesure de prévoir l'évolution d'une voie est crucial au regard de la disponibilité des réseaux ferroviaires, de leurs entretiens ainsi que des coûts de maintenance associés. Aussi, la prévision est-elle une information supplémentaire particulièrement utile pour les exploitants de réseaux ferroviaires.

L'identification des données d'exploitation (voie & matériel roulant), l'analyse et la compréhension du comportement de l'interface roue - rail sont des pré-requis à consolider. Le développement de modèles numériques prédictifs des profils de dégradation du rail (usure et fatigue) en fonction des conditions d'exploitation est nécessaire afin de valider les choix technologiques et de maîtriser les coûts de vie de la voie.

Le dimensionnement de la dalle de voie joue un rôle essentiel dans la conception des voies en béton. La méthode utilisée actuellement chez ALSTOM Transport se base sur une modélisation simple unidimensionnelle de la voie couplée à une modélisation empirique des courbes de fatigue (courbes de Wöhler). Cette méthode permet de dimensionner la dalle de voie rapidement. Cependant, elle ne prend pas en compte la triaxialité du champ de contraintes dans la dalle, ni la physique sous-jacente à la fatigue. Nous proposons ici une nouvelle méthode tri-dimensionnelle et couplée à une modélisation physique de la fatigue.

0.2. Système de la voie ferrée

Les constituants de la voie ferrée dépendent du type de la voie et du train (voie ballast, voie béton), mais en général, les composants de la voie ferrée sont le rail, le système d'attache, les semelles, les traverses (ou les selles) et les couches d'assise.

Rail : le rail est le premier élément en contact entre le véhicule et la voie. Il se charge de transmettre et de répartir les forces du véhicule sur le système en dessous. Il y a différents types de rails avec différentes caractéristiques.

Semelles et système d'attache : les semelles sont en général en élastomère (caoutchouc). Leur taille est petite (environ 9mm d'épaisseur) mais elles sont très importantes pour la stabilité du système (elles jouent le rôle d'un amortisseur). Les attaches sont aussi très importantes pour la stabilité du rail.

Traverses (ou selles) : les traverses transmettent les efforts entre le rail et le ballast ou les dalles en béton (pour les tramways). De plus, elles maintiennent l'écartement des deux files de rail. Actuellement, les traverses en béton armé sont les plus utilisées (par rapport à celles en bois et en acier). Les traverses sont en général placées à un intervalle de 60 cm sur la voie. Elles sont assez rigides.

Couches d'assise : elles comprennent la couche de ballast (pour les voies ballastées) ou la couche de support en béton (pour les voies sur dalle), la sous-couche et la plate-forme.

Le système de la voie ferrée étudié dans cette thèse est celui d'une voie urbaine en béton (fig. 0.1).

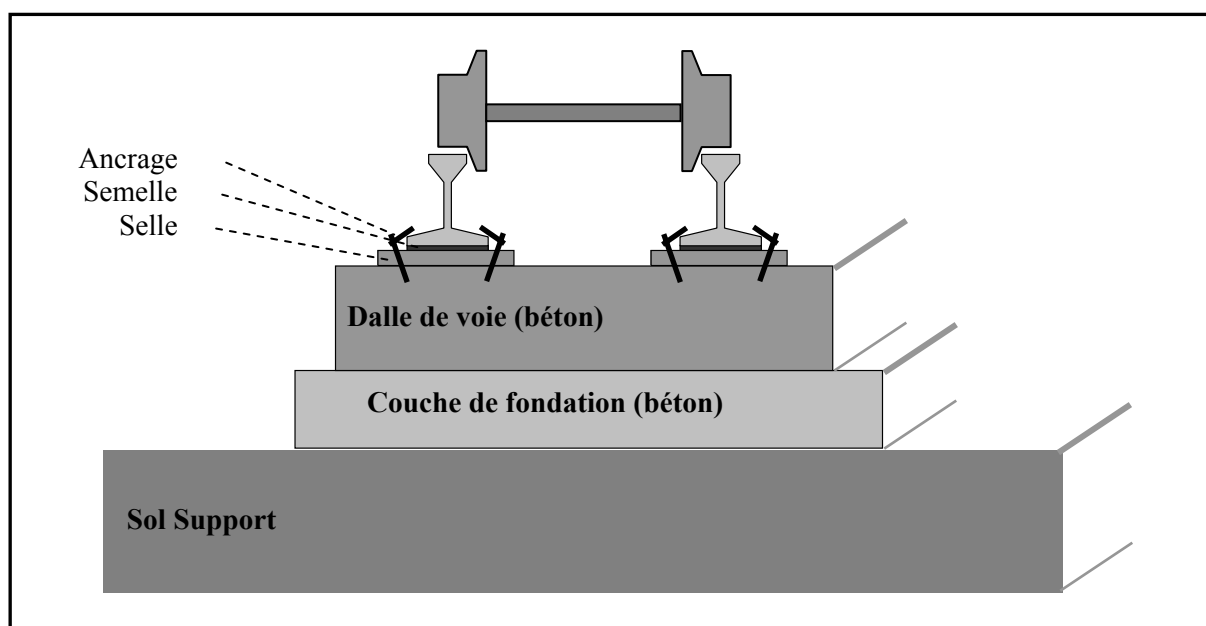


Figure 0.1 : Voie en béton standard

0.3. Structure du rapport

Ce mémoire se compose de deux parties : la première partie est consacrée à la dégradation du rail et la deuxième partie est dédiée à la fatigue et à la fissuration des dalles de voie en béton.

Partie 1 : Dégradation du rail (chapitres 1 et 2)

Dans le chapitre 1, nous présentons un aperçu des travaux et des théories développés autour des problèmes de contact roue – rail, d'usure et de fatigue du rail.

Le deuxième chapitre est dédié au développement de l'outil numérique, nommé CONUS, concernant la dégradation du rail. Nous commençons ce chapitre par un rappel des théories utilisées dans CONUS, puis, nous présentons les interfaces graphiques de cet outil. Ces interfaces graphiques facilitent la mise en donnée des problèmes et l'affichage des résultats. Enfin, nous discutons des résultats numériques obtenus par CONUS. La comparaison avec les résultats de la littérature constitue une première étape de validation de notre outil CONUS.

Partie 2 : Fatigue et Fissuration du béton (chapitres 3, 4 et 5)

Dans le chapitre 3 nous dressons une revue bibliographique sur la fatigue du matériau béton. Nous distinguons deux approches : une approche dite empirique qui n'utilise que les résultats expérimentaux pour modéliser la courbe de fatigue (courbe de Wöhler), et une approche dite théorique qui utilise les théories de la mécanique (mécanique de la rupture et mécanique de l'endommagement) pour reconstruire les courbes expérimentales et prédire les phénomènes observés.

Dans le chapitre 4 nous utilisons la mécanique de l'endommagement pour étudier la fatigue du béton. Le formalisme de Marigo couplé avec le modèle d'endommagement de Mazars est emprunté pour modéliser l'évolution du paramètre de l'endommagement sous chargement cyclique. Des courbes numériques de fatigue (courbe de Wöhler) sont construites et comparées avec les résultats expérimentaux. Une application sur le dimensionnement de la dalle de voie est présentée.

Le chapitre 5 est dédié au modèle de réseau de poutres (Lattice model). Ce modèle est implanté dans le code de calcul par la méthode des éléments finis CESAR-LCPC. Le post-traitement de propagation des fissures est réalisé à l'aide du logiciel MATLAB. Différents problèmes de fissuration de structures simples en béton sous chargement statique sont discutés. L'extension du modèle de réseau de poutres au problème de fatigue fait l'objet de la dernière section de ce chapitre.

Partie 1

Usure et fatigue du rail

Sommaire de la partie 1

Introduction.....	9
Chapitre 1: Revue bibliographique - Usure et Fatigue du rail	11
1.1. Introduction	12
1.2. Contact roue - rail	13
1.3. Usure du rail	18
1.4. Usure ondulatoire du rail	21
1.5. Fatigue du contact roulant (RCF) du rail	26
1.6. Conclusion	38
Chapitre 2 : Développement des outils numériques – Usure et Fatigue du rail.....	39
2.1. Rappels théoriques.....	40
2.2. Présentation de l’outil numérique CONUS	57
Conclusions et perspectives	68

Introduction

L'objectif de cette première partie consiste dans un premier temps en une recherche bibliographique sur les différents problèmes de dégradation du rail : contact roue - rail, usure abrasive du rail, usure ondulatoire du rail et fatigue de roulement du rail. L'origine de chaque type de dégradation du rail sera étudiée en détail.

Comme l'origine des défauts du rail est le contact roue - rail, nous allons commencer par réaliser une étude détaillée de ce problème. Cela nous permettra de bien comprendre ce qui se passe au niveau du contact roue - rail et d'appréhender les efforts dynamiques transmis dans la voie ferrée. Différentes théories de contact existent dans la littérature. Pour le contact roue - rail, la théorie simplifiée de Kalker avec l'algorithme FASTSIM est utilisée dans la plupart des logiciels de calcul dynamique ferroviaire (VAMPIRE, SIMPACK, GENSYS, VOCO, ...).

Dans un problème d'usure, il existe toujours différents types d'usure : usure adhésive, usure abrasive, usure érosive, usure par fatigue et usure corrosive. Pour le problème d'usure du contact roue - rail, certains spécialistes se sont accordés sur l'origine essentiellement abrasive des usures observées. Afin de calculer l'usure abrasive du profil des rails, nous pouvons utiliser la théorie d'Archard ou la méthode de calcul de l'énergie dissipée dans la zone de contact. Ces théories seront présentées dans la suite.

Un autre type de défaut du rail est l'usure ondulatoire du rail. Elle se manifeste sous forme d'ondulations étendues sur les surfaces des profils dans la direction du roulement. Elle constitue ainsi des sources d'excitation de vibrations inconfortables (bruit) et des sources de fatigue. L'usure ondulatoire représente un coût très important pour la maintenance. Des recherches sur ce problème ont débuté à la fin du 19^{ème} siècle. Cependant, aucun des travaux existants n'explique parfaitement les mécanismes de formation et de développement de ce type d'usure.

Le dernier défaut rencontré sur le rail que nous étudierons dans cette thèse est la fatigue de contact de roulement du rail. Différents types de fissure par fatigue du rail ainsi que des modèles théoriques existants seront exposés dans les deux prochains chapitres.

Un autre objectif de cette partie est de développer un outil numérique simple comportant une interface graphique pour les ingénieurs. Le choix et la mise en œuvre sous MATLAB des modèles existants seront discutés dans le chapitre 2.

Chapitre 1

Revue bibliographique - Usure et Fatigue du rail

Sommaire du chapitre 1

1.1. Introduction	12
1.2. Contact roue - rail	13
1.2.1. Caractéristiques du contact roue - rail	13
1.2.2. Théories de contact.....	14
1.2.3. Méthodes de simulation du contact roue - rail	17
1.3. Usure du rail	18
1.3.1. Mécanisme d'usure abrasive	19
1.3.2. Lois d'usure.....	19
1.3.3. Méthode d'essai pour déterminer les paramètres de l'usure du rail	20
1.3.4. Méthodes de calcul de l'usure du rail.....	21
1.4. Usure ondulatoire du rail	21
1.4.1. Mécanismes de l'usure ondulatoire du rail.....	22
1.4.2. Différents types de l'usure ondulatoire du rail	23
1.4.3. Traitement de l'usure ondulatoire du rail	24
1.4.4. Méthodes de prédiction de l'usure ondulatoire du rail	25
1.5. Fatigue du contact roulant (RCF) du rail	26
1.5.1. Phénomène de fatigue de l'acier en général.....	26
1.5.2. Phénomène de fatigue du contact roulant (RCF) du rail	29
1.5.3. Modèles existants de prédiction de RCF du rail.....	32
1.6. Conclusion	38

1.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est de donner un aperçu des travaux et des théories développées autour des problèmes d'usure et de fatigue du rail.

Comme l'origine des défauts du rail est le contact roue - rail, nous allons commencer ce chapitre par une présentation générale du problème de contact roue - rail. Différentes théories de contact existent dans la littérature. Pour le contact roue - rail, la théorie simplifiée de Kalker avec l'algorithme FASTSIM est utilisée dans la plupart des logiciels de calcul dynamique ferroviaire (VAMPIRE, SIMPACK, GENSYS, VOCO, ...).

Concernant l'usure abrasive du profil des rails, l'approche classique pour calculer les matières usées est l'utilisation de la théorie d'Archard ou le calcul de l'énergie dissipée dans la zone de contact.

Un autre type de défaut du rail est l'usure ondulatoire du rail. Il demande un investissement très important pour la maintenance. Ce type de défaut fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Cependant, nous ne disposons pas encore de modèles fiables permettant de prédire complètement ce défaut.

Enfin, nous présentons le problème de fatigue de roulement du rail dans la dernière partie de ce chapitre. Différents types de fissure par fatigue du rail ainsi que les modèles théoriques existants seront exposés dans cette partie.

1.2. Contact roue - rail

L'interaction entre la roue et le rail est toujours très difficile à approcher. Il existe un grand nombre d'études dans la littérature sur ce problème. Cependant, Il n'y a toujours pas d'approche complète.

Expérimentalement, la dynamique locale du contact roue - rail est inaccessible. Les moyens expérimentaux développés ne peuvent que tenter de reconstituer la dynamique locale de contact en fonction des informations physiquement accessibles.

Depuis le début du 20^{ème} siècle, de nombreuses théories ont été développées dans le but de déterminer temporellement les efforts transmis et mouvements relatifs dans un contact roulant avec frottement. Elles sont plus ou moins complexes, mais il y a toujours des limitations que nous allons présenter dans cette partie.

1.2.1. Caractéristiques du contact roue - rail

En général, nous considérons le contact roue - rail comme un contact élastique roulant. La zone de contact est souvent modélisée par une ellipse (contact de Hertz). La taille de cette zone de contact est petite (moins de 1 cm²) devant les rayons de courbures principaux du rail et de la roue.

Dans la zone de contact roue - rail, nous trouvons toujours deux parties : une partie d'adhérence (les deux solides sont collés) et une partie de glissement (il y a un mouvement relatif entre deux solides en contact) (fig. 1.1).

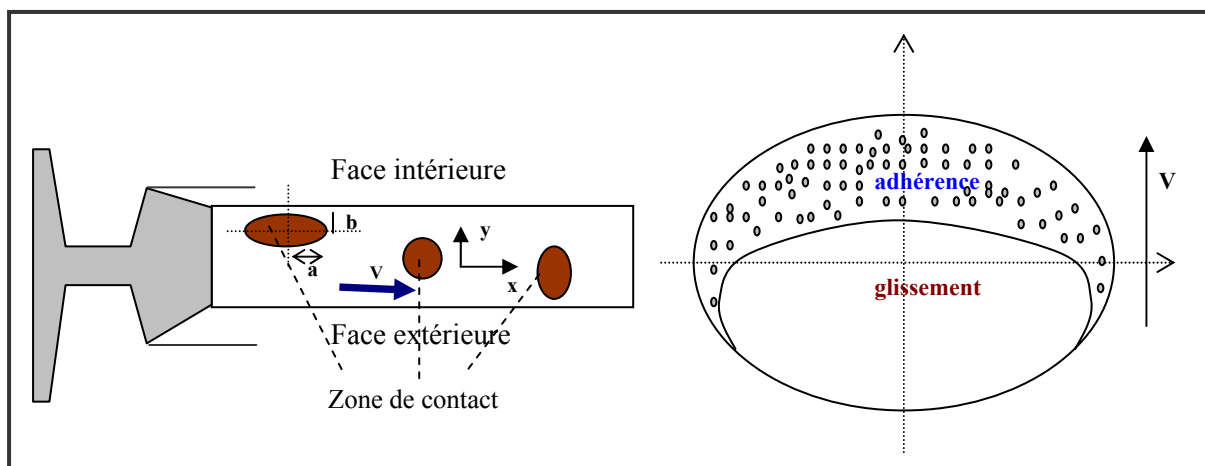


Figure 1.1. Caractéristiques du contact roue - rail

Avec une charge sur la roue assez élevée, entre 40 kN (Tramway) et 130 kN (TGV ou Fret), nous pouvons avoir une très haute pression (1000-2000 MPa) dans la zone de contact roue - rail. En fonction de la vitesse de roulement du train et de l'état des surfaces de contact, les efforts tangentiels dans la zone de contact peuvent être plus ou moins importants. La haute pression et les contraintes tangentielles sont des causes directes de différents types de dégradation du rail et de la roue (usure, fissuration, rupture,...).

1.2.2. Théories de contact

a. Théorie de Hertz

En 1881, Hertz a développé une méthode pour étudier la forme de la zone de contact ainsi que la distribution des pressions sur la surface de contact entre deux solides élastiques. Cette théorie a été utilisée à de nombreuses reprises pour calculer les efforts normaux dans le contact roue - rail. La théorie de Hertz n'est cependant valide que si les trois conditions suivantes sont réunies: Les surfaces sont du second degré, continues, et non-conformes; Chaque solide peut être considéré comme un demi-espace élastique; Les dimensions du contact sont petites devant les dimensions et rayons de courbure des corps en contact.

Dans le cas du ferroviaire, si le contact entre la roue et le rail se passe sur la table de roulement du rail, les dimensions du contact (a et b sont souvent inférieurs à 10 mm) restent négligeables devant les rayons de courbure de la roue et du rail (< 300 mm) et les conditions de Hertz sont souvent vérifiées. Cependant, l'inscription d'un train dans une courbe tend souvent à localiser le contact roue - rail au niveau du congé de raccordement entre la table de roulement et la joue active du rail, dont le rayon de courbure est inférieur à 20 mm. Les conditions de Hertz ne sont alors plus vérifiées et la théorie de Hertz n'est plus valable.

b. Théorie de Carter

La première solution "classique" au problème du contact roulant avec frottement a été déterminée analytiquement par Carter en 1926. Ce dernier modélise le roulement d'une roue sur un rail par celui d'un cylindre sur un massif plan semi-infini permettant ainsi de résoudre ce contact sous la forme d'un contact linéique en deux dimensions dans le plan (X, Z).

Carter montre tout d'abord que la différence entre la vitesse d'avance (V_a) et la vitesse linéaire (V_l) de la roue est non nulle tant que des conditions d'accélération ou de décélération sont appliquées à cette

dernière : c'est le glissement longitudinal v_x . Cette différence croît avec le couple moteur tant que la valeur limite de l'effort tangentiel (T_x) dans le contact reste inférieure à sa limite en accord avec la loi de Coulomb.

D'autre part, il démontre, tant expérimentalement que théoriquement, la coexistence de zones d'adhérence et de glissement dans le contact, dont la répartition varie en fonction du glissement longitudinal v_x . Expérimentalement, cette coexistence est établie en photoélasticité en considérant l'inertie des corps négligeable, les surfaces lisses et non contaminées et pour de très faibles vitesses d'avance. Théoriquement, cette coexistence est obtenue par la superposition des contraintes tangentielles $q_1(x)$ et $q_2(x^*)$, établies respectivement dans les cas de non glissement et de glissement complet (figure 1.2).

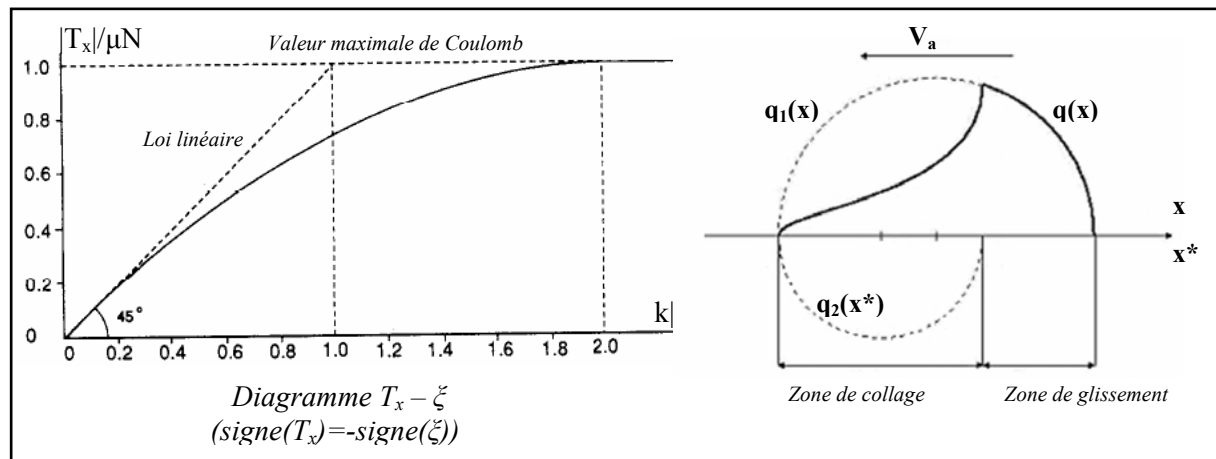


Figure 1.2. Théorie de Carter

c. Extensions de la théorie de Carter

La théorie de Carter, ne traitant que du contact linéique 2D en glissement longitudinal v_x , est tout d'abord étendue aux contacts circulaires en glissements longitudinal v_x et transversal v_y par Johnson (1958). Puis une extension supplémentaire est faite aux contacts elliptiques par Haines et Ollerton (1963) ainsi que Vermeulen et Johnson (1964) dont les coefficients de glissement (k) seront déterminés avec plus de précision par Shen-Hedrick-Elkins (1983). Ces théories permettent de déterminer la répartition d'une part des contraintes tangentielles $q(x, y)$ et d'autre part, des zones d'adhérence et de glissement dans un contact roulant elliptique. Une extension de la théorie de Shen-Hedrick-Elkins pour le cas de grand spin est celle de Zhang-Knothe (1995). Enfin, la théorie de Polach (1999) est une des dernières théories classiques traitant le problème tangentiel du contact entre deux solides.

d. Théories de Kalker

Les théories de Kalker (simplifiée, linéaire et complète) sont particulièrement dédiées au contact roue - rail. Les algorithmes dérivés de celles-ci sont donc naturellement implantés dans la plupart des logiciels multicorps de dynamique ferroviaire actuels.

La première théorie de Kalker est « la théorie linéaire » (1967). Cette théorie est basée sur la linéarisation de la formule de Carter. Cependant, cette théorie n'est valable que sous les conditions suivantes : Le taux de glissement $\bar{\xi}$ est petit ; La zone de contact est elliptique hertzienne ; Le roulement se passe dans la direction de l'un des axes de l'ellipse (*approximation pour le contact rail-roue*).

La deuxième théorie de Kalker est « la théorie simplifiée » (1973-1989). Cette théorie résout d'abord le problème normal du contact roue - rail, géométrie et champ de pression, par la théorie de Hertz. Ensuite, les taux de glissement, estimés géométriquement au centre de l'ellipse de contact, sont considérés constants sur l'ensemble du contact. Afin de déterminer les efforts tangentiels induits par ces glissements, le contact est discrétisé en bandes parallèles indépendantes orientées parallèlement au sens de circulation du véhicule. Chaque bande est alors modélisée par un ensemble de trois ressorts orthogonaux dont les raideurs, appelées aussi coefficients de glissement de Kalker (C_{ij}), sont constantes en tout point de la surface de contact. Une relation linéaire est ainsi définie entre les déplacements et les efforts tangentiels. Cette théorie, avec l'algorithme **FASTSIM**, est particulièrement utilisée dans la littérature pour le contact roue - rail.

La troisième théorie de Kalker est « la théorie complète » (1979-1990). La roue et le rail ne sont plus des surfaces lisses du second degré comme dans la théorie linéaire et la théorie simplifiée : le contact n'est plus Hertzien et la surface de contact résultante n'est plus elliptique. La zone potentielle de contact est alors divisée en mailles élémentaires rectangulaires au sein desquelles les forces normales et tangentielles sont résolues par un schéma itératif basé sur une approche énergétique du problème. L'hypothèse de découplage du problème tangentiel et du problème normal faite pour les deux théories précédentes n'est donc ici plus valide.

Bien que plus représentative de la réalité du contact roue - rail que les théories précédentes, la théorie complète n'est pratiquement pas utilisée dans les logiciels de dynamique ferroviaire car sa mise en application, via l'algorithme CONTACT, multiplie les temps de calcul par 1000. D'autre part, le

comportement du matériau étant élastique linéaire, cette théorie ne permet pas d'étudier les phénomènes d'usure tel que l'usure ondulatoire des voies pour les trains de marchandise. Cette théorie reste alors une référence pour les autres théories.

e. Autres approches du contact roue - rail

Il faut noter que toutes les théories de contact roue - rail présentées précédemment ne prennent pas en compte l'effet plastique des matériaux. Pour surmonter ce problème, de nouvelles approches du contact roue - rail (éléments finis, troisième corps,...) sont en développement depuis quelques années. Cependant, en considérant la complexité et le temps de travail ainsi que le temps de simulation, ces approches ne seront pas abordées dans notre étude.

1.2.3. Méthodes de simulation du contact roue - rail

En utilisant les théories de contact présentées dans la partie précédente, différents logiciels ont été développés pour simuler l'interaction voie - véhicule et le comportement du système ferroviaire. Nous pouvons citer ici quelques logiciels des plus utilisés dans le domaine ferroviaire : VAMPIRE, SIMPACK, VOCO, GENSYS, NEWCAR, MEDYNA, ADAMS, DYMOCAL ...

La modélisation utilisée dans ces logiciels est de type « corps rigides - multicorps ». Les solides (caisse, châssis, bogie, essieux, moteurs, réducteurs,...) sont modélisés par des masses ponctuelles, reliées par des liaisons viscoélastiques, des butées avec jeu, des éléments à seuil, etc.

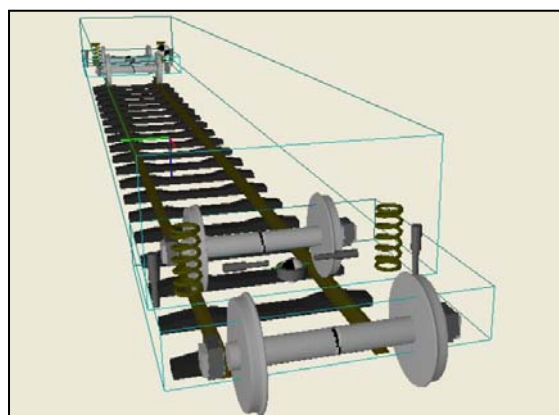


Figure 1.3. Modèle multi-corps [Manuel VAMPIRE]

1.3. Usure du rail

« Usure : détérioration par un usage prolongé, par le frottement, etc. », le petit ROBERT.

Pour mieux comprendre l'usure du rail, nous commençons par présenter le mécanisme d'usure du contact entre deux solides où il y a enlèvements de matière.

Les termes de « **premiers corps** » et « **troisième corps** » sont couramment employés en tribologie. Ils désignent respectivement les deux solides en contact et le milieu intermédiaire situé entre leurs surfaces, composé d'éventuels débris d'usure, du fluide, du lubrifiant, etc. Dans l'interface composée du troisième corps et des surfaces des deux premiers corps ont lieu le contact et la dégradation.

Selon la gravité de ses conséquences (relatives à un contexte donné) l'usure est dite douce ou sévère (par exemple, la coupe d'un métal est de l'usure sévère alors que la perte d'une couche surfacique par oxydation est plutôt de l'usure douce). Quand à ses causes et aux processus, ils sont classés en cinq types suivant les mécanismes: usure adhésive, usure abrasive, usure érosive, usure par fatigue et usure corrosive.

Dans un problème d'usure, il existe toujours ces différents types. Cependant, la résolution d'un problème couplé (prenant en compte tous les types d'usure) est complexe, et on travaille souvent avec un seul type d'usure (celui qui est le plus important pour le cas traité).

Pour le problème d'usure du contact roue - rail, certains spécialistes se sont accordés sur l'origine essentiellement **abrasive** des usures observées des roues et des rails.



Figure 1.4. Rail usé

1.3.1. Mécanisme d'usure abrasive

L'usure abrasive est l'usure par déplacement de matière, produite par des particules dures ou des protubérances dures. Les particules dures peuvent se trouver entre les deux surfaces en mouvement relatif ou être encastrées dans l'une des surfaces. L'usure abrasive se manifeste par des polissages, des griffures et des arrachements de copeaux (fig.1.5).

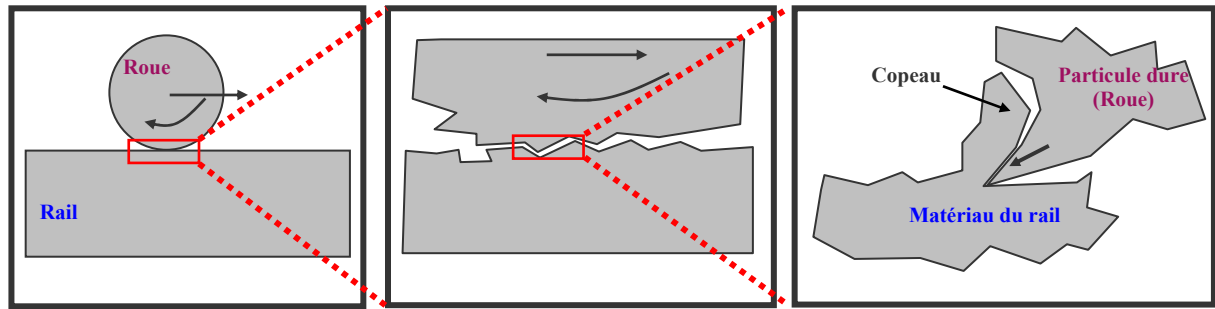


Figure 1.5 : mécanisme d'usure abrasive du rail

1.3.2. Lois d'usure

Afin d'étudier le problème d'usure pour le système ferroviaire, de nombreux travaux ont été réalisés depuis un siècle. Différentes lois d'usure ont été développées comme celle d'Archard (1953, 1980), de Rabinowicz (1965), de Suh et al. (1974, 1977), de Fries et al. (1988), Clayton et al. (1996).

Il y a quatre lois qui sont appropriées pour traiter l'usure du contact rail-roue : Usure proportionnelle à l'énergie surfacique de glissement (loi énergétique); Usure proportionnelle au produit de la charge normale et la distance parcourue (Archard) ; Usure proportionnelle à la pression maximale de contact ; Usure proportionnelle à la charge normale. Parmi ces quatre lois, la loi d'Archard et la loi énergétique sont les plus utilisées dans la littérature : A. Johansson (2005, 2007), C. Andersson (2004), Hempelmann (1991, 1996), Kalker (1994), Knothe (1991, 1996, 1999), Tassilly (1991), Brahim (1997),...

Loi d'Archard : Le volume des matières usées est calculé par la formule ci-dessous :

$$V = k \frac{F_n}{H} d$$

où V est le volume usé, F_n est la force normale, d est la distance de glissement, H est la dureté du matériau, k est le coefficient d'Archard (k dépend des conditions expérimentales : matériaux antagonistes mais aussi configuration géométrique, chargement, environnement, température et vitesse relative).

Loi énergétique : Le volume des matières usées est calculé par la formule ci-dessous :

$$V = \frac{C_w}{\rho} . E$$

où V est le volume usé, C_w est le coefficient d'usure, E est l'énergie dissipée, ρ est la densité du matériau.

Nous constatons que les deux approches (Archard et énergétique) donnent les mêmes résultats si les paramètres dans ces modèles vérifient la relation $k/H = C_w \cdot \mu / \rho$.

Il existe aussi des modèles utilisant le mécanisme de rupture par fatigue du comportement asymptotique de type « rochet » ou « ratcheting » en anglais, pour étudier l'usure du contact roue - rail. Les études les plus avancées dans ce domaine sont celles de l'équipe de A. Kapoor à l'université de Newcastle en Angleterre : « Layer model » (A. Kapoor et al.) (2006), « Brick model » (F.J. Franklin et al) (2006).

L'approche tribologique (troisième corps) est aussi utilisée pour étudier le contact roue - rail et l'usure des profils du rail: Lavis (2002, 2003, 2004), Saulot (2005), Fillot (2007). Cependant, il est très difficile de caractériser le troisième corps.

1.3.3. Méthode d'essai pour déterminer les paramètres de l'usure du rail

Pour chaque modèle (loi), il faut toujours déterminer expérimentalement le coefficient de proportionnalité (k pour la loi d'Archard, C_w pour la loi énergétique) qui dépend de différents paramètres (matériaux, géométrie et structure du système, environnement, chargement, vitesse relative, ...). Ce coefficient peut être estimé par les essais « twin-disc » en laboratoire (fig. 1.6).

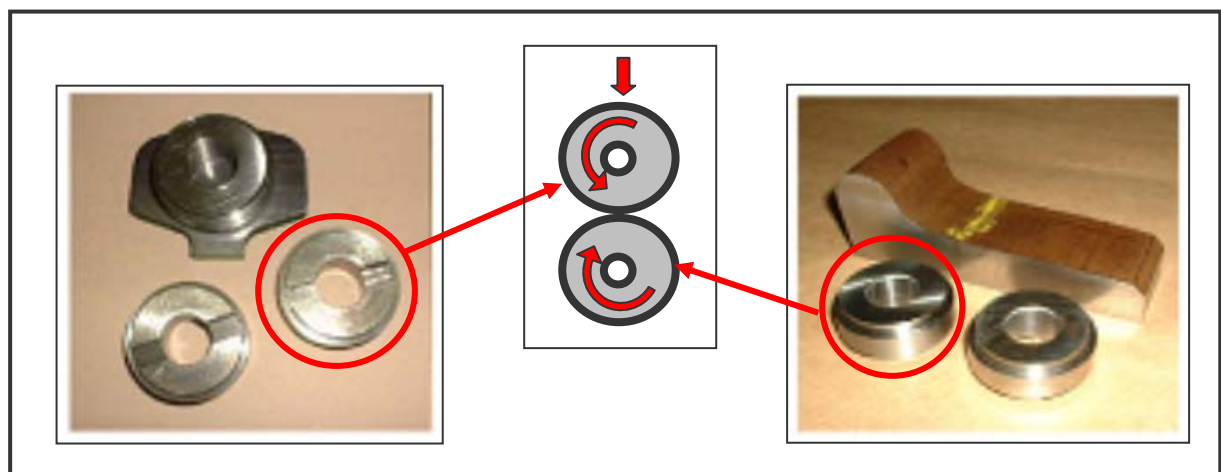


Figure 1.6 : essai en laboratoire pour déterminer le coefficient d'usure

1.3.4. Méthodes de calcul de l'usure du rail

Pour simuler très précisément le changement des profils du rail et de la roue, il faut faire une simulation complète en prenant en compte la variation simultanée des deux profils (du rail et de la roue comme indiqué dans la figure 1.7). Cependant, il est très difficile de faire varier les deux profils en même temps. Donc, en réalité, on ne fait varier qu'un profil à chaque fois (l'autre est considéré comme inchangé). La simulation de l'usure des profils du rail, avec une boucle fermée, a été faite par Brahim SOUA (1997) avec le code VOCO. Un processus de calculs itératifs, décrit par l'organigramme ci-dessous, est nécessaire pour pouvoir suivre l'évolution de l'usure du profil du rail dans le temps.

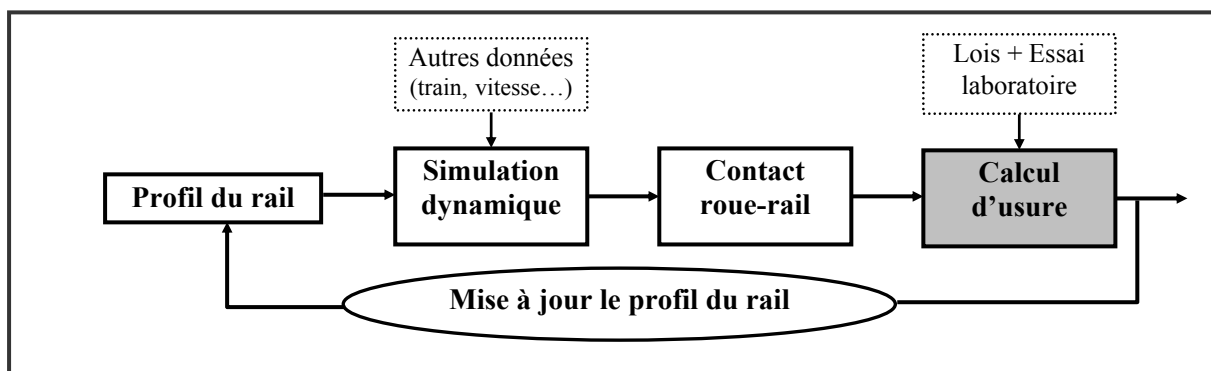


Figure 1.7 : Boucle fermée d'une simulation numérique de l'usure du rail

1.4. Usure ondulatoire du rail

L'usure irrégulière longitudinale du type ondulatoire demeure l'un des phénomènes les plus mal connus pouvant détériorer les profils des roues et des rails dans le domaine ferroviaire. Cette usure se manifeste sous forme d'ondulations étendues sur les surfaces des profils dans la direction du roulement (fig.1.4). Elle constitue ainsi des sources d'excitation de vibrations inconfortables (bruit) et des sources de fatigue. L'étude de ce phénomène a commencé depuis la fin du 19^{ème} siècle. Pendant un siècle, il y a eu de nombreuses études sur ce problème. Cependant, tous les travaux existants ne peuvent pas expliquer parfaitement les mécanismes de formation et de développement de ce type d'usure.



Figure 1.8 : Usure ondulatoire du rail

L'usure ondulatoire est définie comme l'apparition de bosses et de creux sur la surface du rail dans la direction longitudinale. Pour étudier ce type de défaut, nous pouvons modéliser la surface du rail usé par une surface ondulatoire (sinusoïdale). L'usure ondulatoire est alors caractérisée par deux paramètres : la longueur d'onde et l'amplitude.

- Longueur d'onde (λ) : distance entre deux bosses. Elle varie entre 20 (mm) et 1500 (mm).
- Amplitude (δ) : $\frac{1}{2}$ profondeur des creux, de l'ordre de 10 – 100 (μm).

1.4.1. Mécanismes de l'usure ondulatoire du rail

Depuis 1971, Carson, Johnson, et Gray ont constaté que l'usure ondulatoire du rail est causée par la combinaison de deux mécanismes : un mécanisme de fixation de la longueur d'onde et un mécanisme d'endommagement.

- **Mécanisme de fixation de la longueur d'onde** : Il existe toujours une rugosité initiale sur la surface d'un rail (neuf ou usé). Pour un modèle mathématique d'usure ondulatoire, on suppose une rugosité initiale sous forme d'un spectre avec des longueurs d'onde dans une bande 5-100 mm pour le type « short-pitch corrugation ». Cette rugosité est la donnée d'entrée de la dynamique « voie - véhicule » qui crée des fluctuations des efforts de contact, des glissements et de la taille de la zone de contact. Ces fluctuations sont plus grandes à certaines fréquences. Pour une vitesse donnée du train, cela signifie que l'usure est plus importante pour certaines longueurs d'onde. C'est le mécanisme de fixation de la longueur d'onde. Après des millions de passages du train, une forme ondulatoire de la surface du rail sera formée. Les mécanismes de fixation de la longueur d'onde sont souvent les résonances du système couplé voie - véhicule (Mode P2), ou la résonance du mode « pinned-pinned » du rail avec les supports discrets.
- **Mécanisme d'endommagement** : Différents mécanismes d'endommagement sont supposés être la cause de l'usure ondulatoire, tels que: usure, déformations plastiques ou fatigue de roulement. Dans la plupart des modèles existants pour le type « short-pitch corrugation », on considère que l'usure est le mécanisme d'endommagement.

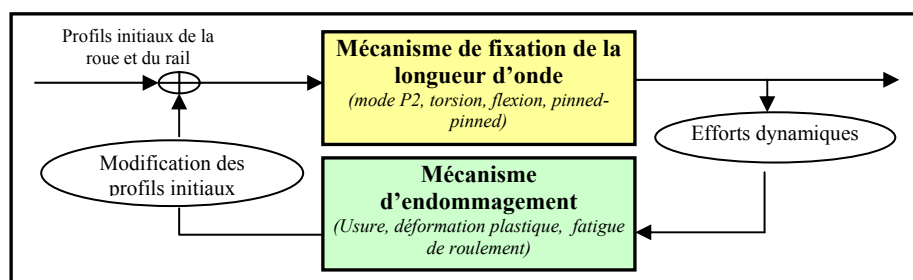


Figure 1.9 : Mécanismes de l'usure ondulatoire du rail

1.4.2. Différents types de l'usure ondulatoire du rail

Selon les mécanismes (fixation de la longueur d'onde et endommagement), on peut constater différents types d'usure ondulatoire du rail.

En 1993, Grassie et Kalousek ont résumé 42 articles et publié un article, nommé « rail corrugation : characteristics, causes and treatments » qui est très utile pour comprendre les travaux effectués entre 1970 et 1990. Ils ont classé l'usure ondulatoire en six catégories: Heavy haul corrugation ($\lambda = 200 - 300$ mm); Light rail corrugation (500 – 1500 mm) ; Booted sleepers type corrugation (45 – 60 mm); Contact fatigue corrugation (150- 450 mm) ; Rutting corrugation (50 mm (trams), 150 – 450 mm); Roaring rail corrugation (25 – 80 mm).

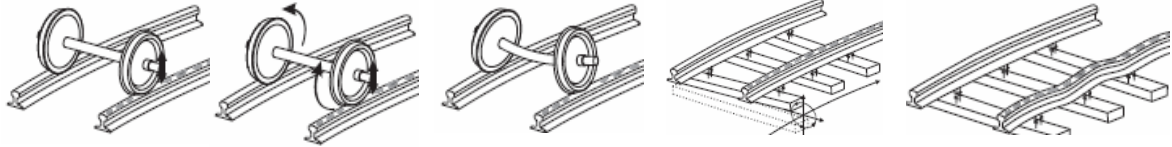
Bien que la scission du mécanisme de formation de l'usure ondulatoire en l'interaction d'un *mécanisme de fixation de la longueur d'onde* avec un *mécanisme d'endommagement* soit largement acceptée, la précédente classification de Grassie et Kalousek (1993) n'emporte pas l'adhésion de tous. Pour améliorer leur classification, Kalousek (2000) et Grassie (2005) ont proposé récemment une nouvelle approche (Tab. 1.1) qui prête moins à confusion et permet d'aborder ce phénomène sous un autre angle. Toujours basée sur la décomposition du mécanisme de formation de cette usure selon un *mécanisme d'endommagement* et un *mécanisme de fixation de la longueur d'onde*, la nouvelle approche s'articule principalement autour de l'analyse des conditions locales de contact qui avaient été précédemment mises au second plan devant l'analyse fréquentielle du système véhicule - voie.

Mécanisme d'endommagement	Mécanisme de fixation de la longueur d'onde	Ancienne classification
Déformation plastique	Mode de résonance P2	I - Heavy haul
Déformation plastique en flexion	Mode de résonance P2	II - Light rail
Fatigue de roulement	Mode de résonance P2	IV - Contact fatigue
Usure	Mode de résonance P2 Mode de torsion de l'axe de l'essieu Mode de résonance « pinned-pinned » Résonance des traverses-chausson élastique Mode de résonance des traverses en béton	Aucune V-Rutting VI-Roaring rail III-Booted sleepers Aucune

Tableau 1.1: Nouvelle classification des usures ondulatoires de Grassie et Kalousek

Nous pouvons trouver une autre classification (tab. 1.2.) des types d'usure ondulatoire du rail dans le rapport du « Transit Cooperative Research Program ». Cette classification est en fait celle de Grassie et Kalousek avec des modifications mineures.

Type	Mécanisme d'endommagement	Mécanisme de fixation de la longueur d'onde	Longueur d'onde
1	Ecoulement plastique, fatigue	Résonance P2	200-1500 mm
2	Usure longitudinale	Torsion de l'essieu	50-200 mm
3	Usure latérale	Modes de flexion	40-60 mm
4	Usure latérale	Résonance de la traverse	40-60 mm
5	Usure longitudinale	Résonance Pinned-Pinned	25-80 mm



Tab. 1.2.: Classification des usures ondulatoires du « Transit Cooperative Research Program »

1.4.3. Traitement de l'usure ondulatoire du rail

La méthode pratiquée actuellement pour traiter l'usure ondulatoire du rail est de meuler ou remplacer les rails. Cette opération est très coûteuse (on dépense deux millions d'euros par an pour meuler les rails du métro de Paris, Collette (2007)).

On peut trouver différentes techniques utilisées pour traiter les causes des différents types d'usure ondulatoire du rail. Collette (2007), a listé ces principales techniques dans le tableau ci-dessous (tab.1.3). Pour avoir plus de détails, on peut consulter la référence [Collette (2007)].

Mesures préventives	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4	Type 5
1. Fixation directe des rails souples	++	-	-	-	+
2. Semelle sous rail souple	+	+	-	+	+
3. Graissage de la tête du rail	-	++	-	++	-
4. Contrôle du frottement (rail)	+	+	+	+	+
5. Rail en acier dur	++	++	+	+	+
6. Enlever le guide de rail	-	-	+	-	-
7. Optimisation des profils des rails	-	+	+	+	-
8. Augmenter le rayon de courbe de la voie	-	+	+	+	-
9. Diminuer les accélérations et freinages	+	+	-	-	-
10. Modifier l'espacement entre traverses	-	-	-	-	+
11. Graissage du bourrelet de la roue	-	+	-	+	-
12. Contrôle du frottement (roue)	+	+	+	+	++
13. Absorbeur de torsion pour l'essieu	-	+	-	-	-
14. Pilotage	+	+	-	+	-
15. Roues souples	+	+	+	+	+
16. Montage entraînement souple	-	+	-	-	-
17. Meulage préventif des rails	++	-	-	++	-
18. Absorbeur sur la traverse	-	-	-	+	-

++ utilisé avec succès ; + résultats positifs, mais pas encore testé ; - aucune recommandation

Tableau 1.3.: Traitement de l'usure ondulatoire du rail (source : Collette 2007)

1.4.4. Méthodes de prédiction de l'usure ondulatoire du rail

En se basant sur les deux mécanismes (mécanisme de fixation de la longueur d'onde et mécanisme d'endommagement), on peut avoir différents modèles (linéaires ou non-linéaires) pour prédire l'usure ondulatoire du rail. Un modèle mathématique de prédiction de l'usure ondulatoire se compose souvent de deux parties :

- Un modèle dynamique de l'interaction voie - véhicule afin de déterminer les efforts et les glissements dans la zone de contact roue - rail.
- Un modèle d'usure abrasive pour le lent processus de l'usure de la surface du rail.

1.5. Fatigue du contact roulant (RCF) du rail

Nous commençons cette partie par une présentation générale du phénomène de fatigue de l'acier afin d'avoir une notion de base de ce phénomène. Ensuite, nous présentons le problème de fatigue du contact roulant (RCF) du rail. Enfin, nous terminons par une synthèse des modèles existants du problème de fatigue du rail.

1.5.1. Phénomène de fatigue de l'acier en général

a. Quelques dates clés à retenir

L'apparition du terme fatigue dans le vocabulaire technique date de la révolution industrielle du 19^{ème} siècle. Dès cette époque, de nombreuses pièces mécaniques qui, de par leur nature et leur fonction, étaient soumises à des sollicitations répétées, vinrent à se rompre en service. Ci-après, nous présentons quelques dates clés à retenir concernant le phénomène de fatigue des matériaux.

1842 : Accident du train Paris -Versailles causé par le problème de fatigue de l'essieu du train.

1843 : Rankine, identification du danger des concentrations de contrainte.

1847 : Wöhler, relation amplitude de chargement - nombre de cycle (courbe de Wöhler : S-N).

1874 : Gerber, influence de la charge moyenne sur la durée de vie en fatigue.

1899 : Goodman, influence de la charge moyenne sur la durée de vie en fatigue.

Fin de 19^{ème} siècle : Bauschinger, limite élastique des métaux, effet de Bauschinger.

1920 : Griffith, énergie surfacique des lèvres de fissure.

1945 : Miner, fatigue en cas du chargement d'amplitude variable, cumul linéaire de dommage.

1954 : Coffin-Manson, relation endommagement par fatigue - déformations plastiques cycliques.

1956 : Crossland, critère pour la limite de fatigue du chargement multiaxial.

1957 : Irwin, singularité de contrainte au fond de fissure, facteur d'intensité de contrainte K.

1959 : Sines, critère pour la limite de fatigue du chargement multiaxial

1961 : Paris, loi de Paris, vitesse de propagation d'une fissure, $da/dN = \alpha \cdot (dK)^\beta$.

1970 : DangVan, critère pour la limite de fatigue du chargement multiaxial.

1970 : Elber, observation de l'effet de refermeture des fissures.

b. Mécanisme de fatigue de l'acier

On entend par fatigue ou endommagement par fatigue la modification des propriétés des matériaux à l'application de cycles d'efforts, cycles dont la répétition peut conduire à la rupture des pièces constituées avec ces matériaux [Bathias 1997].

On peut distinguer 3 phases dans le phénomène de fatigue: Amorçage, Propagation des fissures, et Rupture brutale de la pièce.

- Amorçage des fissures : L'amorçage des fissures est toujours dû à une déformation plastique localement concentrée. Les fissures de fatigue s'amorcent souvent à la surface des métaux (contraintes superficielles plus importantes qu'à cœur, grains plus libres, contact direct avec l'environnement, rayures ...). Jusqu'à un certain seuil d'endommagement, il est possible de faire disparaître l'endommagement et donc de revenir à un état initial non endommagé.
- Propagation des fissures : En phase de propagation, on distingue en général deux stades de développement de fissures :

Stade I : Propagation des microfissures ($\frac{da}{dN} < 3.10^{-7} (mm / cycle)$)

Stade II : Propagation d'une des microfissures, qui devient alors la fissure de fatigue et conduira à la ruine de la pièce

- Rupture brutale de la pièce : A la fin du stade II de la propagation des fissures, la taille d'une fissure atteint la valeur critique ce qui conduit à une rupture brutale de la pièce en question.

c. Types de fatigue

On peut classifier différents types de fatigue selon les conditions de sollicitation ou selon le nombre de cycles, comme ci-dessous. Ces classifications ne sont pas absolues. Elles nous permettent juste de mieux comprendre le phénomène de fatigue.

- Classification selon les conditions de sollicitation: Fatigue de contact ; Fretting – fatigue ; Fatigue - fluage ou fatigue-thermomécanique; Fatigue – corrosion.
- Classification selon le nombre de cycles à rupture: Fatigue polycyclique (HCF : High Cycle Fatigue) ; Fatigue oligocyclique (LCF : Low Cycle Fatigue).

d. Courbe de Wöhler

La courbe de Wöhler est très connue dans le domaine de la fatigue des matériaux. Elle représente la relation entre l'amplitude du chargement cyclique et le nombre de cycles à la rupture du matériau.

Afin d'avoir une représentation mathématique de la courbe de Wöhler, de nombreux d'auteurs ont proposé différentes formules. Nous pouvons citer ici quelques formules mathématiques de la courbe de Wöhler qui sont : Wöhler (1847), Basquin (1910), Stromeyer (1914), Palmgren (1924), Corson (1955). Parmi elles, la formule de Stromeyer ($S=a+ (b/N)^c$) est la plus utilisée.

e. Effets de la contrainte moyenne

L'augmentation de la contrainte moyenne ou contrainte statique conduit à réduire la résistance aux sollicitations dynamiques d'un matériau. Pour visualiser l'évolution de l'amplitude de contrainte admissible σ_a en fonction de la contrainte moyenne σ_m , différents diagrammes ont été proposés.

- Diagramme de Haigh.
- Courbes de Söderberg, de Goodman et de Gerber : Pour analyser et quantifier l'influence de la contrainte moyenne, Gerber (1874), Goodman (1899) et Söderberg (1939) ont effectué des essais uniaxiaux et proposé les courbes $\sigma_a - \sigma_m$ ci-contre. La loi de Goodman convient bien aux métaux fragiles. Par contre, celle de Gerber s'applique bien aux alliages ductiles tandis que celle de Söderberg s'applique bien aux alliages métalliques.

f. Cumul linéaire de dommage (loi de Miner)

Miner (1945) reprenant les études de Palmgren (1924) a proposé une loi simple de dommage qui repose sur l'hypothèse suivante (hypothèse de linéarité) : l'application de n_i cycles au niveau de contrainte σ_i , auquel le nombre moyen de cycles à la rupture est N_i entraîne un accroissement du dommage égal à n_i/N_i et la rupture intervient quand $\sum_i \frac{n_i}{N_i} = 1$. Cette règle de Miner n'est pas très précise, mais elle a l'avantage d'être d'une grande simplicité. C'est la raison pour laquelle elle est encore utilisée par beaucoup d'auteurs.

Il existe beaucoup d'autres lois (linéaires et non linéaires) de cumul de dommage par fatigue des matériaux. Pour avoir plus d'information sur le sujet, on peut consulter l'ouvrage de Bathias traitant de la fatigue (Bathias 1997).

g. Effets du chargement multiaxial

Un critère de fatigue polycyclique, critère de limite d'endurance, est un outil permettant de distinguer parmi tous les trajets de chargement dans l'espace des contraintes, ceux qui sont endommageants de ceux qui ne le sont pas. Pour formuler un critère de fatigue multiaxial, de nombreux chercheurs ont proposé des formules prenant en compte la contrainte de cisaillement et la contrainte normale pour un choix du plan de cisaillement maximal. Les critères les plus connus sont ceux de Sines, Crossland et DangVan.

1.5.2. Phénomène de fatigue du contact roulant (RCF) du rail

Le problème de la fatigue du contact roulant du rail intéresse, depuis quelques décades, non seulement les chercheurs mais aussi les entreprises ferroviaires dans le monde entier. Ce problème est observé surtout sur les voies à grande vitesse, les voies mixtes, et les voies de fret. Il cause un investissement très important au niveau de la maintenance des voies ferrées. Le problème peut devenir encore plus dangereux quand le rail est rompu. C'est la raison pour laquelle l'objectif primordial de plusieurs travaux est de comprendre les mécanismes et avoir un moyen de contrôler et d'éliminer la fatigue du contact roulant du rail.

a. Mécanisme de RCF du rail

RCF (Rolling Contact Fatigue) est une famille de défauts qui apparaît sur la surface de roulement et/ou près de la surface de roulement, due aux chargements répétés du contact roue - rail. En général, on observe trois phases d'apparition et de développement pour ce type de défaut:

- Phase 1 : Les fissures sont créées par les déformations plastiques sévères sur la surface du rail. A cause de ces déformations plastiques, le matériau sur la surface du rail devient plus dur et plus fragile. Les micro - fissures apparaissent sur la surface ou près de la surface du rail et elles s'amplifient dans la tête du rail très vite au début et de moins en moins vite quand elles rentrent dans la tête du rail. Ces fissures s'inclinent suivant un angle d'environ 15° selon la direction de roulement.

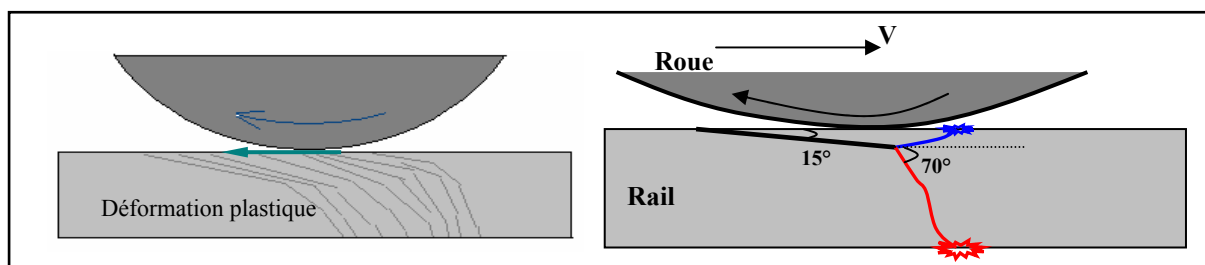


Figure 1.10: Apparition et propagation des fissures par fatigue du rail

- Phase 2 : La propagation des fissures se poursuit dans la même direction inclinée à cause du champ des contraintes de contact roue - rail. Les contraintes de cisaillement inverse font d'abord augmenter la vitesse de propagation des fissures quand la profondeur des fissures augmente. Ensuite, cette vitesse atteint une valeur maximale et puis diminue à cause de la diminution des

contraintes par rapport à la distance à la surface du rail. Typiquement, la profondeur de la zone d'influence du champ des contraintes de contact roue - rail est de l'ordre de 10 à 15 mm.

- Phase 3 : Les contraintes élevées et les contraintes résiduelles dans le rail causent les différentes fissures avec différentes directions (vers le haut et vers le bas). Les fissures vers le haut produisent des copeaux. Les fissures vers le bas, avec un angle d'environ 70°, peuvent causer une propagation continue des fissures jusqu'à la rupture du rail (fig. 1.10).

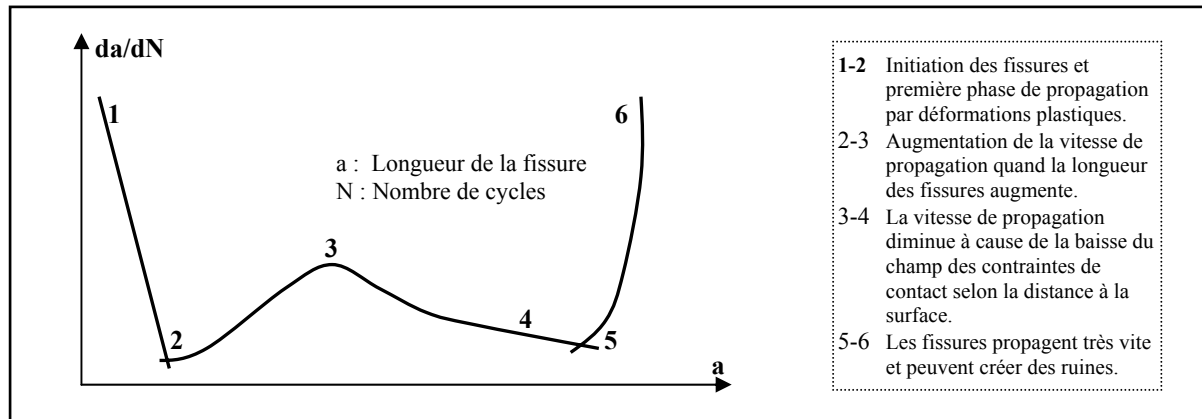


Figure 1.11: Vitesse de propagation des fissures du rail selon leur longueur

b. Types de RCF du rail

Nous pouvons trouver différents types de RCF du rail. Parmi eux, les Head-checks et les Squats sont les types de RCF du rail les plus connus sur les réseaux ferroviaires.

Head-checks : C'est la fissuration, écaillage du congé de roulement (défaut no. 2223 dans le code UIC712). Ce défaut est souvent observé sur les rails de la file haute des voies en courbes (de rayon R entre 500 et 1000m).

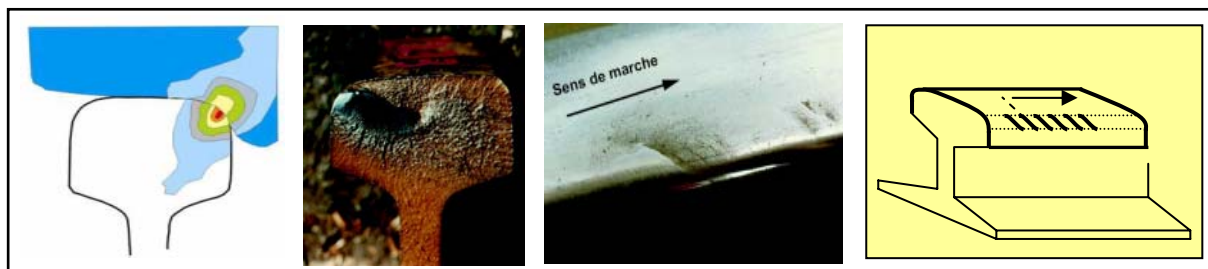


Figure 1.12 : Head-checking

Ce défaut se présente d’abord sous forme de petites fissures fines parallèles transversales (45°) au niveau du congé du côté de la face active. Ces fissures se propagent ensuite en profondeur et entraînent l’écailage du congé et/ou la rupture transversale du rail. La densité des fissures et leurs espacements (entre 1 mm et plusieurs cm) sont très variables.

Le Head-checking peut se présenter sous les formes suivantes (UIC712): Head-checking stabilisé et uniforme ; Head-checking avec écaillage (la progression des fissures à l’intérieur du champignon se fait selon un angle de 10° à 15° jusqu’à une profondeur maximale pouvant atteindre plusieurs mm. Elles évoluent ensuite parallèlement à la table de roulement pour finir par se rejoindre et conduire à un écaillage du congé de roulement.) ; Head-checking apparaissant sous la forme d’une longue fissure ayant à son extrémité supérieure une ramification suivant l’axe longitudinal du rail (ce type de Head-checking s’accompagne en amont d’une petite dépression caractérisée par son apparence sombre. Un élargissement de la table de roulement est souvent visible. Lorsqu’il se présente périodiquement, ce défaut peut conduire à des ruptures multiples sur quelques mètres.).

Squats : C’est la fissuration et affaissement local de la table de roulement (défaut no. 227 dans le code UIC712). Ce défaut se manifeste sur la table de roulement par un élargissement et un affaissement localisé de la bande de contact rail/roue, accompagnés d’une tâche sombre et de fissures en forme d’arc ou de V (fig. 1.13). Les fissures se propagent à l’intérieur du champignon, d’abord selon un angle faible par rapport à la surface de roulement. Ensuite, lorsqu’elles atteignent 3 à 5 mm de profondeur, elles bifurquent transversalement vers le bas, entraînant la rupture du rail.



Figure 1.13: Squats

Ce défaut est également fréquemment observé sur les soudures électriques et aluminothermiques et dans les zones d’usure ondulatoire. La position des squats sur les rails est de nature aléatoire et peut se manifester en de nombreux points, ce qui les rend dangereux en raison du risque de ruptures multiples avec lacunes importantes. Ce type de défaut est connu en Europe depuis une trentaine d’années. Aujourd’hui, les Squats deviennent un problème majeur pour les entreprises ferroviaires.

c. Méthodes de diminution de la formation des fissures par RCF du rail

Il y a plusieurs méthodes pour diminuer la formation des fissures par fatigue du contact roulant (RCF). Nous pouvons citer ici : le meulage du rail pour enlever les micro-fissures sur la surface du rail, la modification des profils de la roue et du rail, le contrôle des erreurs de la géométrie de la voie pour réduire les efforts de contact, et enfin le contrôle du frottement de contact roue - rail et de l'écartement entre les deux rails.

1.5.3. Modèles existants de prédiction de RCF du rail

Afin de mieux contrôler le problème de rupture du rail à cause de la fatigue, de nombreux auteurs ont proposé des modèles plus ou moins complexes. Ces modèles peuvent être classés en trois grandes familles : « Shakedown map », « damage function » et Critère de DangVan.

a. Les modèles utilisant le « shakedown map »

Pour les matériaux élasto-plastiques soumis à un chargement périodique, on montre qu'ils ont une réponse asymptotique périodique en contrainte. L'état asymptotique (lorsque le temps t tend vers l'infini), caractérisé par l'évolution de la déformation inélastique et de l'écrouissage, peut être une adaptation (une réponse asymptotique élastique), une accommodation (une réponse limite en boucle fermée) ou un rochet (une accumulation de déformation plastique) (fig. 1.14).

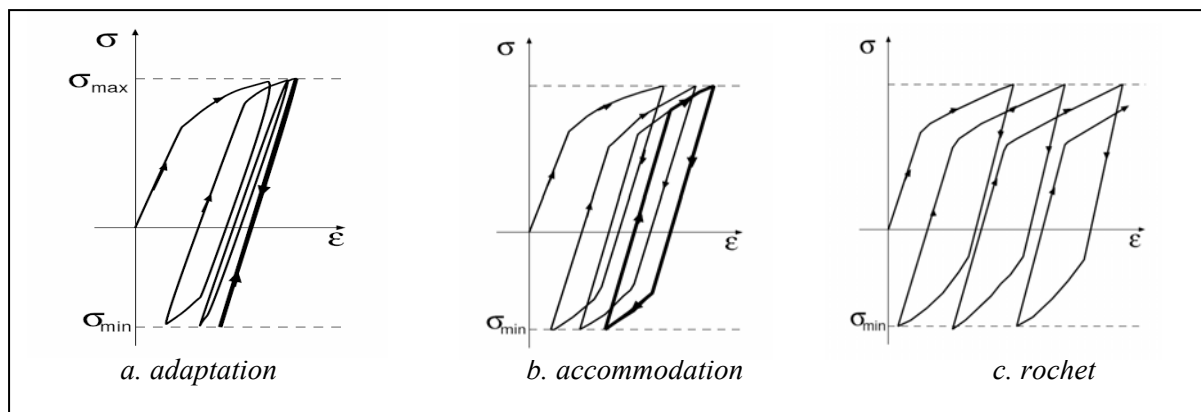


Figure 1.14 : Comportements asymptotiques des matériaux élasto-plastique

Ponter et al. (1985) ont publié un article traitant le problème du contact roulant (fig. 1.15) d'un solide sur un demi-espace élastique plastique parfait, avec les hypothèses ci-dessous :

- Matériau élastique plastique parfait
- Zone de contact est un cercle ($a=b$)
- Efforts normaux de Hertz
- Glissement total dans la zone de contact
- Pas de déformation latérale
- Charge répétée sur une ligne droite

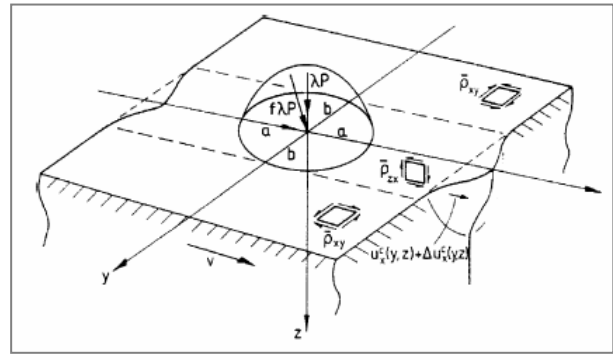


Figure 1.15: Problème de Ponter et al.

La solution de ce problème est présentée sous forme d'un « shakedown map » (fig. 1.16).

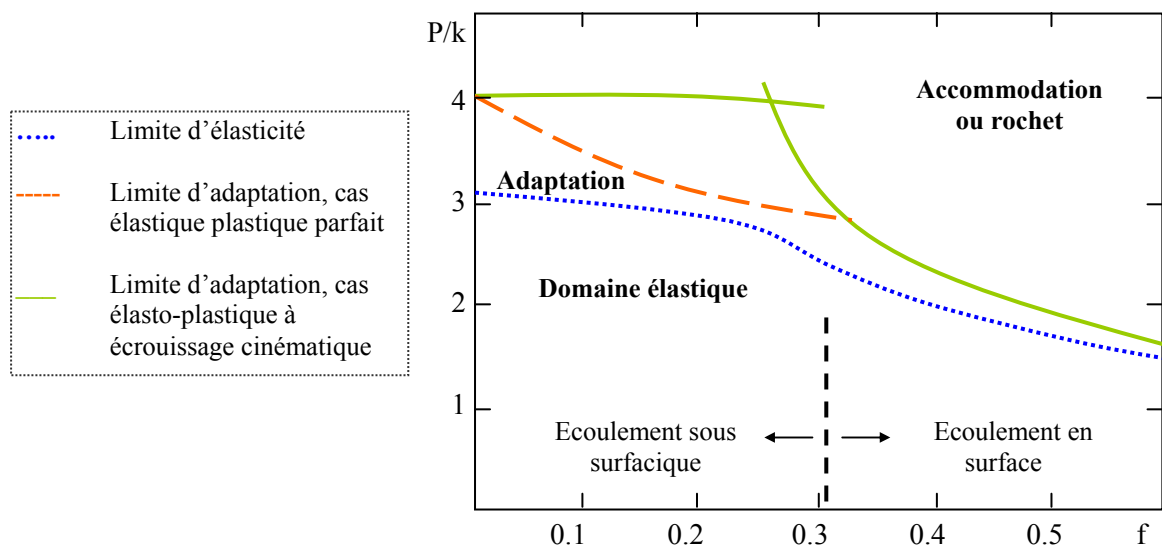


Figure 1.16: Shakedown map

Depuis sa publication, ce « shakedown map » est utilisé, en le combinant avec les calculs dynamiques multi-corps, par beaucoup de praticiens dans le domaine ferroviaire. Cependant, la plupart d'entre eux ne vérifient pas les hypothèses ci-dessus.

Dans un autre article récent, Ponter (2006) a montré, en utilisant une méthode numérique, que ces limites d'adaptation dépendent fortement de la taille de l'ellipse de contact (a/b) et aussi des efforts tangentiels (F/Q).

Ekberg et al. (2002) ont utilisé la même idée afin de proposer un modèle simple que les ingénieurs peuvent facilement utiliser pour prédire l'initiation des fissures par fatigue sur la surface du rail. Ils modélisent la courbe de frontière du domaine de rochet par une équation simple $v = 1/\mu$ (fig. 1.17).

Ensuite, ils comparent le coefficient de frottement avec la valeur calculée par cette courbe en introduisant un paramètre « fatigue index » ($FI_{surf} = \mu - 1/v = \mu - 2\pi abk/3F$).

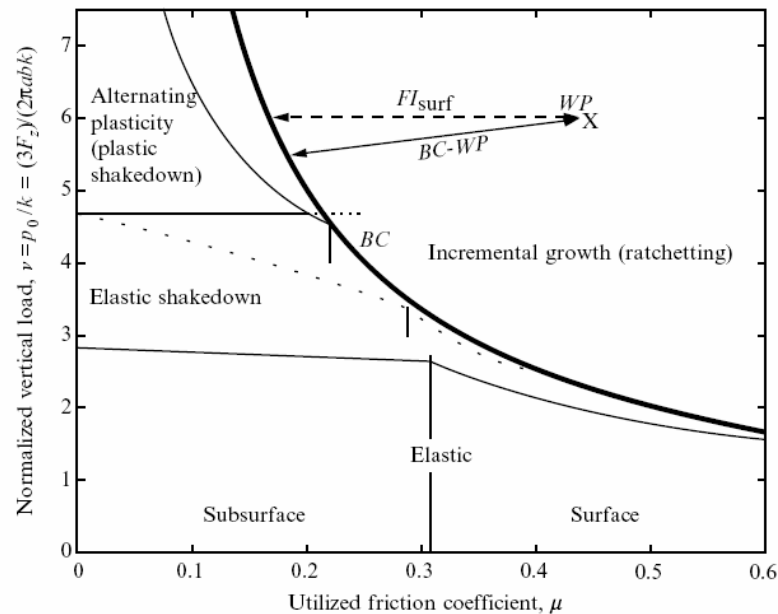


Figure 1.17 : Modèle de Ekberg - Fatigue index

L'avantage de cette approche est qu'elle est simple à utiliser et qu'il n'y a pas beaucoup de paramètres à identifier. Cependant, cette méthode ne nous donne que quelques indications sur la possibilité d'apparition des fissures par fatigue avec un faible nombre de cycle de chargement. Elle peut être utilisée pour comparer la performance en fatigue de deux types de rail, par exemple. On ne peut prédire ni le nombre de cycles de chargement, ni la position des fissures.

b. Paramètres d'endommagement par fatigue

L'idée principale de ces modèles est de définir un paramètre d'endommagement par fatigue, permettant de prédire le risque d'avoir des fissures par fatigue sur la surface de roulement du rail. En général, ce paramètre d'endommagement est fonction de différents paramètres du contact roue - rail (les efforts tangentiels, le coefficient de frottement, l'énergie de glissement).

La première méthode utilisée pour définir ce paramètre d'endommagement est basée sur le « Shakedown map ». Le paramètre « fatigue index » présenté dans la partie précédente est un exemple de ce modèle. Il existe également d'autres modèles de ce type, par exemple : « shakedown exceedance - B » ou « Propensity - A » (fig.1.18).

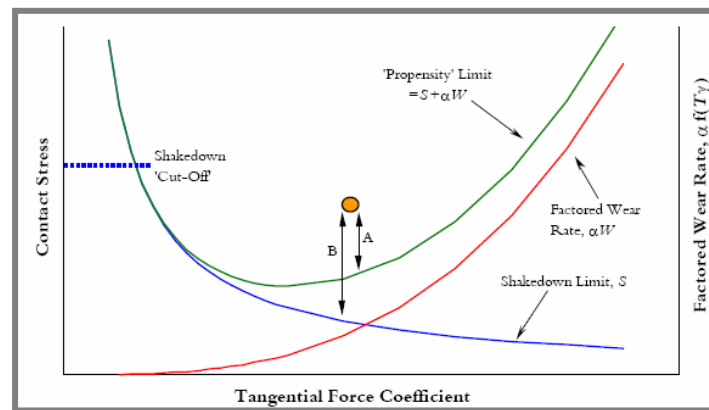


Figure 1.18: Shakedown exceedance et Propensity

Sinclair et Allery (199) ont introduit un autre paramètre d'endommagement ($T\sigma^{3.5}$) pour prédire l'initiation des squats. Ce paramètre est identifié à partir d'essais en laboratoire. Comme le « fatigue index » et le « shakedown exceedance », ce paramètre ne prend pas en compte l'influence de l'usure. Pour surmonter ce problème, les auteurs ont proposé de n'utiliser ce modèle que pour les voies de rayon plus grand que 1000m (car pour les voies en courbe de faible rayon, l'usure est sévère).

Dans le cadre du projet « Whole Life Rail Model – WLRM », conduit par « The Rail Safety and Standard's Board – RSSB » entre 2002 et 2004, le paramètre T-gamma (produit des efforts tangentiels et des taux de glissement) est utilisé pour prédire la fatigue de roulement du rail (fig.1.19). Ce modèle permet d'avoir une compétition entre l'usure et la fatigue de roulement du rail. Si T-gamma est inférieur à un certain seuil, il n'y a pas de dommage. Si T-gamma est petit (entre 15 et 65 J/m) le phénomène de fatigue domine l'usure. Si T-gamma est très grand (supérieur à 175 J/m), l'usure domine la fatigue. Pour les valeurs intermédiaires de T-gamma, les deux phénomènes de fatigue et d'usure co-existent.

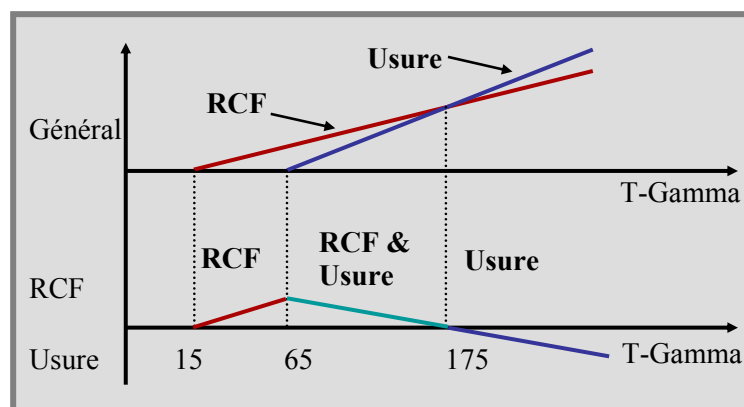


Figure 1.19: Modèle T-gamma

Pointner et Donawitz (2008) ont proposé une carte d'endommagement (fig. 1.20) prenant en compte deux paramètres : la contrainte tangentielle et la vitesse de glissement relatif dans la zone de contact.

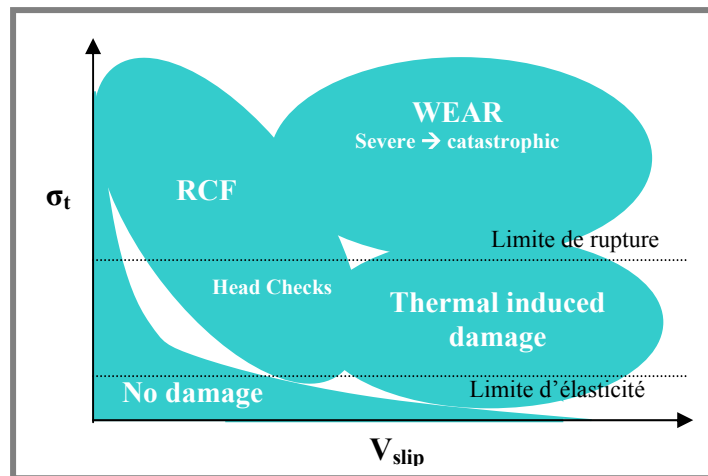


Figure 1.20: Présentation de Pointner et Donawitz

c. Les modèles utilisant le critère de DangVan

Un critère de fatigue polycyclique, critère de limite d'endurance, est un outil permettant de distinguer parmi tous les trajets de chargement dans l'espace des contraintes, ceux qui sont endommageants de ceux qui ne le sont pas. Pour formuler un critère de fatigue multiaxial, de nombreux chercheurs ont proposé des formules prenant en compte la contrainte de cisaillement et la contrainte normale pour un choix du plan de cisaillement maximal.

L'élaboration du critère de DangVan fondé sur le passage macro-méso comprend les principales étapes suivantes :

- Passage macro-méso : le grain est considéré comme une inclusion dans une matrice élastique. On admet que le grain et la matrice sont isotropes et possèdent les mêmes coefficients élastiques.
- Adaptation locale du grain : on suppose que localement le grain s'adapte avant de fatiguer.
- Condition d'endurance illimitée : le critère de non amorçage de fissure de fatigue est exprimé sous la forme : $\max_t \{ \tau(t) + aP(t) \} \leq b$ (a, b sont des paramètres du matériau).

Beaucoup de chercheurs ont utilisé le critère de DangVan pour étudier la fatigue de roulement du rail. Cependant, la plupart d'entre eux ne vérifient pas l'hypothèse d'adaptation du matériau, ainsi que

l'influence des contraintes résiduelles à cause des déformations plastiques pendant les premiers cycles de chargement. Nous pouvons citer ici quelques travaux sur la fatigue de roulement du rail, utilisant le critère de DangVan : Soua (1997), Ringsberg (2000), Zili (2010).

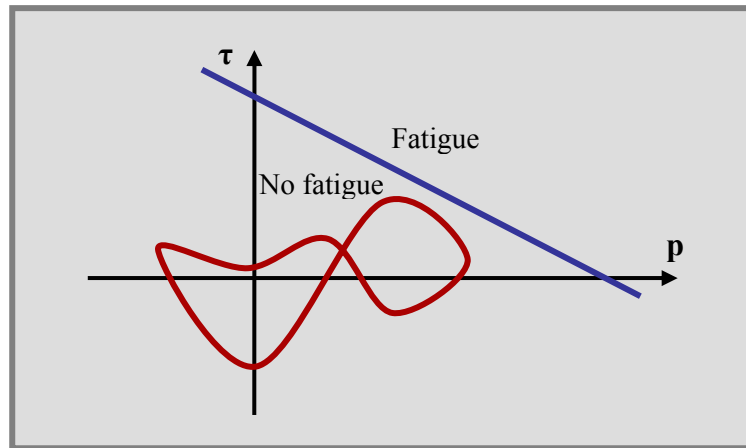


Figure 1.21: Diagramme de DangVan

Maitournam (1993) a proposé une méthode numérique, méthode stationnaire, permettant de prédire l'état asymptotique des matériaux élasto-plastiques sous chargement répétitif et de calculer les contraintes résiduelles à l'état limite. L'idée principale de cette méthode est de travailler dans le repère mobile ($x = X + V.t$) du chargement et de remplacer les grandeurs $\dot{B} = \frac{dB}{dt}$ par leurs incréments dans l'espace $\dot{B} = -V \cdot \frac{\partial B}{\partial x}$. L'avantage de cette méthode est qu'on peut résoudre n'importe quel type de matériau élasto-plastique avec différents types de chargement cyclique (elliptique ou non-elliptique).

Pour un problème global de la fatigue de roulement du rail, DangVan et Maitournam (2008) ont proposé une procédure de calcul avec différentes étapes :

- Identification des paramètres du matériau et l'état initial du rail ;
- Modélisation dynamique du système ferroviaire pour identifier et récupérer les chargements au niveau du contact roue-rail ;
- Calcul stationnaire de l'état asymptotique du rail ;
- Vérification du critère de DangVan et détermination de la position du point d'amorçage de fissure si le comportement asymptotique est une adaptation ;
- Calcul de propagation des fissures dans le rail avec une loi modifiée de Paris.

1.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un panorama des différents problèmes liés au contact roue - rail. Nous avons commencé par une présentation générale du problème de contact roue - rail. Différentes théories de contact ont été discutées. La théorie de Hertz pour le contact normal et la théorie simplifiée de Kalker avec l'algorithme FASTSIM sont utilisées dans la plupart des logiciels de calcul dynamique ferroviaire.

Concernant l'usure abrasive du profil des rails, l'approche classique pour calculer les matières usées est l'utilisation de la théorie d'Archard ou le calcul de l'énergie dissipée dans la zone de contact.

Un autre type de défaut du rail discuté dans cette étude est l'usure ondulatoire du rail. L'origine de ce problème est la combinaison de deux mécanismes : mécanisme de fixation de la longueur d'onde (dynamique du système voie - véhicule) et mécanisme d'endommagement (usure abrasive ou déformation plastique du rail). Beaucoup de modèles existent dans la littérature. Cependant, ces modèles ne sont valables que sous certaines hypothèses. Il n'y a pas de modèle permettant de prédire complètement ce défaut. Cela reste encore un problème à résoudre dans les prochaines années.

Enfin, nous avons parlé du problème de fatigue de roulement du rail dans la dernière partie de ce chapitre. Différents types de fissure par fatigue du rail ainsi que les modèles théoriques existants ont été présentés dans cette partie.

Chapitre 2

Développement des outils numériques – Usure et Fatigue du rail

Sommaire du chapitre 2

2.1. Rappels théoriques.....	40
2.1.1. Efforts normaux du contact de Hertz.....	40
2.1.2. Efforts tangentiels	42
2.1.3. Calcul de l'usure abrasive	47
2.1.4. Modèle linéaire pour étudier l'usure ondulatoire	48
2.1.5. RCF du rail	53
2.2. Présentation de l'outil numérique CONUS	57
2.2.1. Problème de contact roue - rail.....	58
2.2.2. Problème d'usure abrasive du rail	61
2.2.3. Problème d'usure ondulatoire du rail	62
2.2.4. Problème de RCF du rail	63

2.1. Rappels théoriques

Nous présentons dans cette partie les modèles théoriques que nous allons implanter dans l'outil numérique.

2.1.1. Efforts normaux du contact de Hertz

Pour le contact roue - rail, nous utilisons la théorie de Hertz pour déterminer la zone de contact et la pression dans le contact.

Hertz a déterminé analytiquement la forme de la zone de contact et le champ de pression régnant en son sein. De forme elliptique, celui-ci est caractérisé par un demi grand axe (l) et un demi petit axe (s).

$$l = m \left(\frac{3}{2} N \frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{A+B} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad s = n \left(\frac{3}{2} N \frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{A+B} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.1)$$

avec :

$$N = \frac{N_0}{\cos(\gamma)}, \quad A = \frac{\cos(\gamma)}{2.R}, \quad B = \frac{1}{2.R_w} + \frac{1}{2.R_r}$$

R : rayon de roulement de la roue, R_w et R_r : rayons de courbure de la roue et du rail au voisinage du contact, γ : angle du plan tangent, N : charge verticale, m , n , r : coefficients de Hertz, ν : coefficient de Poisson, E : module d'Young.

Les demi-axes de l'ellipse :

$$\begin{cases} a = s, b = l & \text{si } A \geq B \\ a = l, b = s & \text{si } A \leq B \end{cases} \quad (2.2)$$

La distribution de la pression normale dans la zone de contact est :

$$p(x, y) = \frac{3N}{2\pi.ab} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (2.3)$$

ce qui donne une valeur maximale au centre de l'ellipse :

$$p_{\max} = \frac{3N}{2\pi.ab} \quad (2.4)$$

Rappel : Comme nous avons déjà mentionné dans le chapitre 1, la théorie de Hertz n'est valable que si les trois conditions suivantes sont réunies:

- Les surfaces sont du second degré, continues, et non-conformes
- Chaque solide peut être considéré comme un demi-espace élastique
- Les dimensions du contact sont petites devant les dimensions et rayons de courbure des corps en contact

Dans le cas ferroviaire, ces trois conditions ne sont vérifiées qu'en présence d'une voie rectiligne. Pour les voies en courbe, avec lesquelles la position du contact se situe au niveau du congé de raccordement entre la table de roulement et la joue active du rail, les conditions précédentes ne sont plus vérifiées, et la théorie de Hertz ne peut plus être utilisée. Ce problème des voies courbes n'est résolu qu'avec la méthode des éléments finis ou avec le code « CONTACT » développé par Kalker.

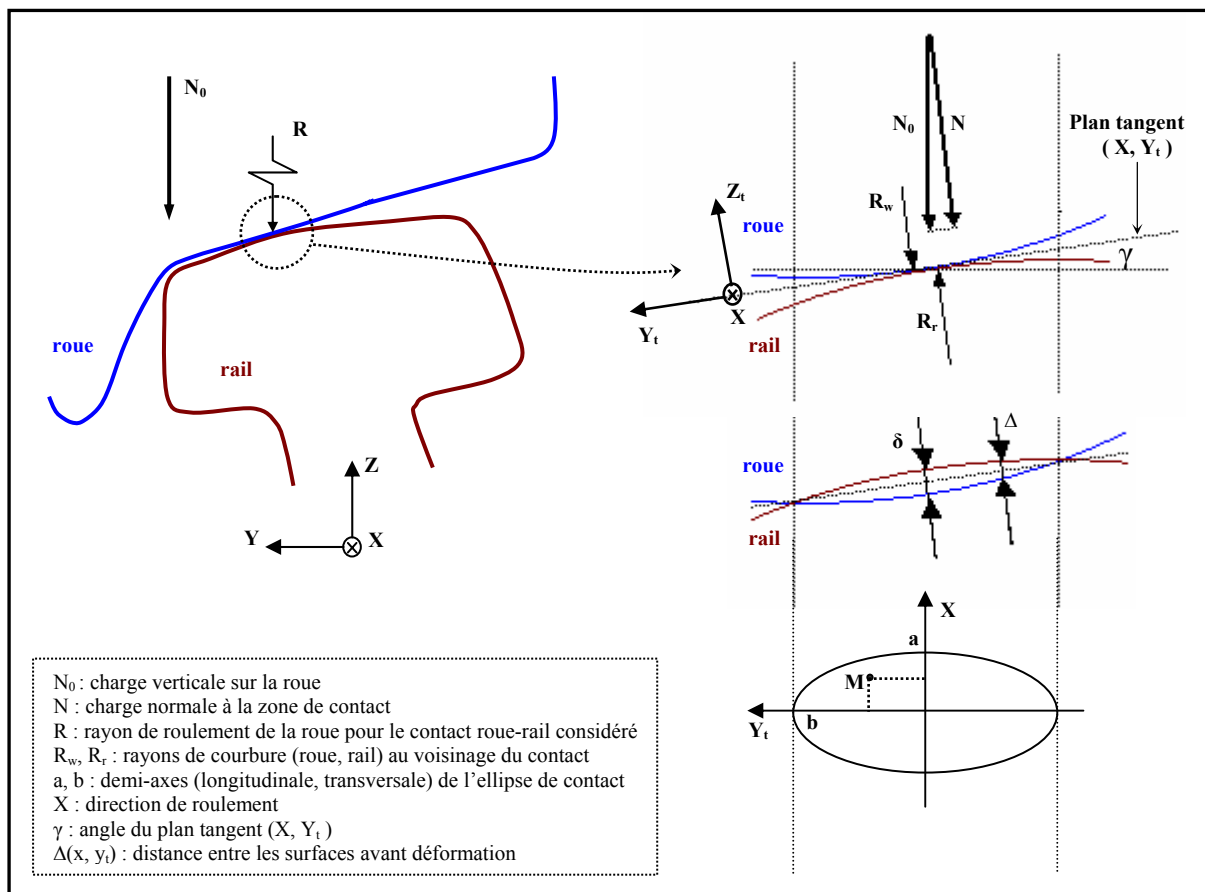


Figure 2.1. Théorie de Hertz

2.1.2. Efforts tangentiels

Nous utilisons la théorie simplifiée de Kalker avec l'algorithme FASTSIM pour l'implanter dans notre outil numérique. Cette théorie sera présentée plus en détail dans cette partie.

a. Les taux de glissement

Afin de pouvoir calculer les efforts tangentiels dans la zone de contact, nous devons d'abord définir les taux de glissement. Ces taux de glissement sont définis comme des quantités relatives. En pratique, on utilise souvent une formule simple:

$$\varepsilon_x = 2 \frac{V_a - V_r}{V_a + V_r} = \frac{V - \omega.r}{V} \quad (2.5)$$

où V est la vitesse d'avancement, r est le rayon de roulement, ω est la rotation de la roue.

Dans la plupart des cas, on ne considère que le glissement dans la direction longitudinale. Mais on peut aussi définir le taux de glissement latéral:

$$\varepsilon_y = \frac{V_{lateral}}{V} \quad (2.6)$$

Il existe aussi un autre type de glissement, le glissement tournant (« spin »). Il apparaît si la zone de contact n'est pas parallèle à l'axe de rotation de la roue. La vitesse de rotation ω est décomposée en deux composantes (fig. 2.1): ω_y parallèle à la zone de contact (rotation pure) et ω_z perpendiculaire à la zone de contact (spin).

Le « Spin » est défini par la relation ci-dessous:

$$\phi = \frac{\omega_z}{V} = \frac{\omega \sin(\gamma)}{\omega.r} = \frac{\sin(\gamma)}{r} \quad (2.7)$$

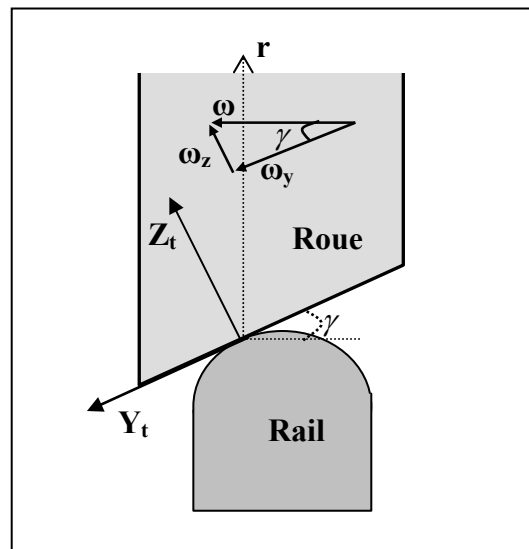


Figure 2.1 : Effet de Spin

b. Théorie simplifiée de Kalker

La théorie simplifiée de Kalker (1973-1989) résout tout d'abord le problème normal du contact roue - rail, géométrie et champ de pression, par la théorie de Hertz. Ensuite, les glissements interfaciaux estimés géométriquement au centre de l'ellipse sont considérés constants sur l'ensemble du contact. Afin de déterminer les efforts tangentiels induits par ces glissements, le contact est discrétisé en bandes parallèles indépendantes orientées parallèlement au sens de circulation du véhicule. Chaque bande est alors modélisée par un ensemble de trois ressorts orthogonaux dont les raideurs, appelées aussi coefficients de glissement de Kalker (C_{ij}), sont constantes en tout point de la surface de contact : une relation linéaire est ainsi définie entre les déplacements et les efforts tangentiels.

On peut définir le vecteur de taux de glissement \vec{G} et le vecteur de taux de pivotement $\vec{\Omega}$ (spin) comme :

$$\vec{G} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{taux de glissement}, \quad \vec{\Omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi \end{Bmatrix} \quad \text{taux de pivotement (spin)} \quad (2.8)$$

Le vecteur de glissement total \vec{W} est défini comme la différence entre le glissement rigide $\vec{\xi}$ induit par le torseur $(\vec{G}, \vec{\Omega})$ et la partie compensée par les déplacements élastiques relatifs des solides \vec{U} . Dans le cas du roulement stationnaire et sachant que l'évolution de la zone de contact s'effectue suivant la direction longitudinale (X), on a :

$$\vec{W} = V_x \cdot \left(\vec{\xi} - \frac{\partial}{\partial x} \vec{U} \right) = V_x \cdot \left(\vec{G} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} - \frac{\partial}{\partial x} \vec{U} \right) \quad (2.9)$$

Le mouvement reste dans le plan (X, Y_t), la composante normale est donc nulle. On peut réécrire (2.9) comme :

$$\begin{cases} \frac{W_x}{V_x} = \varepsilon_x - y_t \phi - \frac{\partial U_x}{\partial x} \\ \frac{W_y}{V_x} = \varepsilon_y + x \phi - \frac{\partial U_y}{\partial x} \end{cases} \quad (2.10)$$

On peut avoir les relations entre les déplacements \vec{U} et les contraintes tangentielles \vec{t} en utilisant la théorie de l'élasticité. Sachant que les aciers des roues et des rails ont les mêmes caractéristiques élastiques, ces relations s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} U_x = \frac{2(1+\nu)}{\pi E} \iint_{\text{zone contact}} \left[\left(\frac{1-\nu}{\rho} + \frac{\nu(x-\zeta)^2}{\rho^3} \right) t_x + \frac{\nu(x-\zeta)(y_t-\eta)}{\rho^3} t_y \right] d\zeta d\eta \\ U_y = \frac{2(1+\nu)}{\pi E} \iint_{\text{zone contact}} \left[\left(\frac{1-\nu}{\rho} + \frac{\nu(y_t-\zeta)^2}{\rho^3} \right) t_y + \frac{\nu(x-\zeta)(y_t-\eta)}{\rho^3} t_x \right] d\zeta d\eta \end{cases} \quad (2.11)$$

Avec

$$\rho = \sqrt{(x-\zeta)^2 + (y_t-\eta)^2} \quad (2.12)$$

La résolution du système (2.11) est longue et fastidieuse.

Kalker a réduit la complexité du problème en supposant une relation linéaire entre les contraintes tangentielles et les déplacements. Le coefficient de proportionnalité L est appelé flexibilité.

$$\begin{cases} U_x = L t_x \\ U_y = L t_y \end{cases} \quad (2.13)$$

On peut alors réécrire (2.10) comme suit :

$$\begin{cases} \frac{W_x}{L V_x} = \frac{\varepsilon_x}{L} - \frac{\phi}{L} y_t - \frac{\partial t_x}{\partial x} \\ \frac{W_y}{L V_x} = \frac{\varepsilon_y}{L} + \frac{\phi}{L} x - \frac{\partial t_y}{\partial x} \end{cases} \quad (2.14)$$

Afin de respecter les résultats de la théorie linéaire, Kalker a proposé l'approximation de l'équation (2.14) par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{W_x}{L V_x} = \frac{\varepsilon_x}{L_1} - \frac{\phi}{L_3} y_t - \frac{\partial t_x}{\partial x} \\ \frac{W_y}{L V_x} = \frac{\varepsilon_y}{L_2} + \frac{\phi}{L_3} x - \frac{\partial t_y}{\partial x} \end{cases} \quad (2.15)$$

L_1, L_2, L_3 sont identifiés en utilisant l'égalité entre les efforts calculés par (2.14) avec $W = 0$ et ceux de la théorie linéaire :

$$\begin{cases} T_x = \iint_{\text{zone contact}} t_x(\zeta, \eta) d\zeta d\eta = -\frac{E}{2(1+\nu)} ab C_{11} \varepsilon_x \\ T_y = \iint_{\text{zone contact}} t_y(\zeta, \eta) d\zeta d\eta = -\frac{E}{2(1+\nu)} ab (C_{22} \varepsilon_y + C_{23} \sqrt{ab} \phi) \end{cases} \quad (2.16)$$

On obtient les expressions des coefficients L_1, L_2, L_3 :

$$\begin{cases} \varepsilon_x : L_1 = \frac{16a(1+\nu)}{3EC_{11}} \\ \varepsilon_y : L_2 = \frac{16a(1+\nu)}{3EC_{22}} \\ \phi : L_3 = \frac{\pi a^2(1+\nu)}{2E\sqrt{ab}.C_{23}} \end{cases} \quad (2.17)$$

La valeur de L peut être choisie comme suit:

$$L = \frac{L_1|\varepsilon_x| + L_2|\varepsilon_y| + L_3|\phi|\sqrt{ab}}{\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + ab.\phi^2}} \quad (2.18)$$

On peut aussi choisir $L = L_1$ si $\varepsilon_x \gg \varepsilon_y, \phi$.

On peut réécrire (2.15) sous la forme :

$$\bar{w}(x, y_t) = \bar{s}(x, y_t) - \frac{\partial}{\partial x} \bar{t}(x, y_t) \quad (2.19)$$

avec :

$$\bar{w}(x, y_t) = \begin{pmatrix} \frac{W_x}{L.V_x} \\ \frac{W_y}{L.V_x} \end{pmatrix}, \quad \bar{s} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_x}{L_1} - \frac{\phi}{L_3} y_t \\ \frac{\varepsilon_y}{L_2} + \frac{\phi}{L_3} x \end{pmatrix}, \quad \bar{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

La distribution de la pression normale dans la zone de contact est donnée par la théorie de Hertz :

$$p(x, y) = \frac{3N}{2\pi.ab} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (2.21)$$

Afin de résoudre l'équation (2.19), Kalker a proposé un algorithme appelé FASTSIM que nous présentons ci-dessous.

c. Algorithme FASTSIM

L'idée principale de cet algorithme est de diviser la zone de contact en plusieurs bandes parallèles à l'axe X. Chaque bande est encore divisée en plusieurs éléments (fig. 2.2). Les contraintes et les déplacements sont constants dans chaque élément. On peut alors écrire (2.19) pour chaque élément. En supposant qu'on connaît les informations à l'élément i , on peut écrire l'équation pour l'élément $i+1$:

$$\bar{w}_{i+1} = \bar{s}_{i+1} + \frac{\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i}{dx_i} \quad (2.22)$$

On en déduit :

$$\vec{t}_{i+1} = \vec{t}_i - \vec{s}_{i+1} \cdot dx_i + \vec{w}_{i+1} \cdot dx_i \quad (2.23)$$

On connaît t_i , s_{i+1} , dx_i . Pour calculer t_{i+1} on suppose d'abord que $w_{i+1} = 0$ et on trouve :

$$\vec{t}_{i+1}^{test} = \vec{t}_i - \vec{s}_{i+1} \cdot dx_i \quad (2.24)$$

Ensuite, on fait une comparaison entre $\|\vec{t}_{i+1}^{test}\|$ et la valeur limite de la force de frottement calculée par la loi de Coulomb $\mu \cdot p_{i+1}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} Si \quad \|\vec{t}_{i+1}^{test}\| = \sqrt{(t_{i+1,x}^{test})^2 + (t_{i+1,y}^{test})^2} \leq \mu \cdot p_{i+1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{t}_{i+1} = \vec{t}_{i+1}^{test} \\ \vec{w}_{i+1} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{Adhérence} \\ Si \quad \|\vec{t}_{i+1}^{test}\| = \sqrt{(t_{i+1,x}^{test})^2 + (t_{i+1,y}^{test})^2} > \mu \cdot p_{i+1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{t}_{i+1} = \frac{\mu \cdot p_{i+1}}{\|\vec{t}_{i+1}^{test}\|} \vec{t}_{i+1}^{test} \\ \vec{w}_{i+1} = (\vec{t}_{i+1} - \vec{t}_{i+1}^{test}) / dx_{i+1} \end{cases} \quad \text{Glissement} \end{array} \right. \quad (2.25)$$

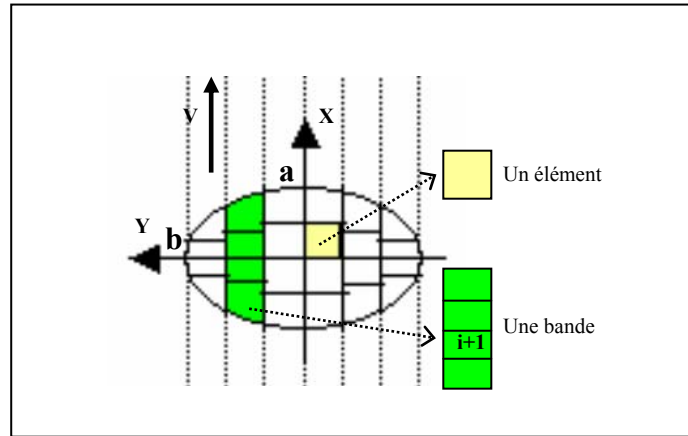


Figure 2.2: Discretisation dans la zone de contact pour FASTSIM (ici c'est une matrice 6x4)

Ce calcul est effectué « bande par bande » et dans chaque bande, on commence par l'élément au bord avant (à X_{max}) qui satisfait la condition du chargement nul $t_0 = 0$.

Une fois la distribution des efforts tangentiels au niveau local connu, on peut calculer les efforts tangentiels globaux par une sommation sur l'ensemble des éléments de l'ellipse de contact :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{T} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \sum_{\text{zone de contact}} \sum \vec{t}_i dx_i dy_i \\ M = \sum_{\text{zone de contact}} \sum [t_{i,y} \cdot x_i - t_{i,x} \cdot y_i] dx_i dy_i \end{array} \right. \quad (2.26)$$

2.1.3. Calcul de l'usure abrasive

Nous utilisons les deux méthodes présentées dans le chapitre 1 pour calculer l'usure abrasive du rail.

a. Loi d'Archard

Nous pouvons utiliser la loi d'Archard pour calculer la matière enlevée localement dans chaque élément discrétisé par FASTSIM.

Le volume des matières enlevées à position i est :

$$V_i = k \frac{F_{n,i}}{H} d_i = \frac{k}{H} p_i dx_i dy_i \|\vec{W}_i\| dt = \frac{k}{H} p_i dx_i dy_i L V_x \|\vec{\omega}_i\| dt \quad (2.27)$$

où k est le coefficient d'usure ; H est la dureté du matériau, d est la distance glissée.

Nous avons aussi :

$$V_i = dz_i . dy_i . V_x . dt \quad (2.28)$$

où dz_i est la profondeur du volume usé, V_x est la vitesse d'avancement.

A partir de (2.27) et (2.28), nous obtenons :

$$V_i = dz_i . dy_i . V_x . dt = \frac{k}{H} p_i dx_i dy_i L V_x \|\vec{\omega}_i\| dt \quad (2.29)$$

Ce qui donne :

$$dz_i = \frac{k.L}{H} p_i dx_i \|\vec{\omega}_i\| \quad (2.30)$$

b. Calcul de l'usure par la méthode énergétique

L'énergie dissipée à la position i dans la zone de contact est calculée à l'aide de la formule suivante:

$$E_i = \|\vec{t}_i\| \|\vec{W}_i\| dt = \mu . p_i . dx_i . dy_i . L V_x \|\vec{\omega}_i\| dt \quad (2.31)$$

Le volume des matières enlevées à la position i est :

$$V_i = \frac{C_w}{\rho} . \mu . p_i . dx_i . dy_i . L V_x \|\vec{\omega}_i\| dt \quad (2.32)$$

Nous avons aussi :

$$V_i = dz_i . dy_i . V_x . dt \quad (2.33)$$

A partir de (2.31) et (2.32), nous obtenons :

$$V_i = dz_i \cdot dy_i \cdot V_x \cdot dt = \frac{C_w}{\rho} \cdot \mu \cdot p_i \cdot dx_i \cdot dy_i \cdot L \cdot V_x \|\omega_i\| dt \quad (2.34)$$

Ce qui donne :

$$dz_i = \frac{C_w \cdot \mu \cdot L}{\rho} p_i dx_i \|\vec{\omega}_i\| \quad (2.35)$$

A partir de (2.30) et (2.35), nous constatons que les deux méthodes (Archard et énergétique) donnent les mêmes résultats si nous choisissons les paramètres tels que :

$$\frac{k}{H} = \frac{C_w \cdot \mu}{\rho} \quad (2.36)$$

2.1.4. Modèle linéaire pour étudier l'usure ondulatoire

Le modèle linéaire pour prédire l'usure ondulatoire est utilisé dans notre étude. Ce modèle n'est valable que pour la phase d'initiation de l'usure ondulatoire de type « short-pitch corrugation ». Il permet de prédire la valeur de la fréquence la plus favorable pouvant créer l'usure ondulatoire sur la surface du rail.

Les hypothèses prises en compte dans le modèle linéaire sont:

- (H1) : Contact stationnaire
- (H2) : Raideur de contact de Hertz constante
- (H3) : Profil longitudinal périodique
- (H4) : Phase d'initiation de l'usure ondulatoire

En supposant que les quatre hypothèses ci-dessus sont vérifiées, nous pouvons linéariser les équations du système roue - rail autour d'une valeur constante qui est la valeur de référence.

Supposons que l'état de référence est noté par la lettre 0 : N_0 , F_{x0} , F_{y0} , ϵ_{x0} , ϵ_{y0} et supposons de plus que les perturbations sont notées par Δ . Cela signifie que $\Delta N \ll N_0$.

Théorie de Hertz :

$$\Delta N = k_c \Delta d \quad \text{avec} \quad k_c = \left(\frac{\partial N}{\partial d} \right)_{N_0, d_0} = \frac{3N_0}{2d_0} \quad (2.37)$$

k_c est la raideur de contact de Hertz, d est la pénétration au centre de l'ellipse de contact.

Nous considérons que k_c est constante et que $k_c = 1.2.10^9 (N/m)$.

Géométrie du contact roue-rail :

Lors du passage de la roue, l'irrégularité de la surface du rail Δz crée un écrasement élastique local des deux corps Δd ainsi qu'un déplacement relatif de la roue par rapport au rail (fig.2.3).

$$\Delta z = \Delta d + \Delta u_z \quad (2.38)$$

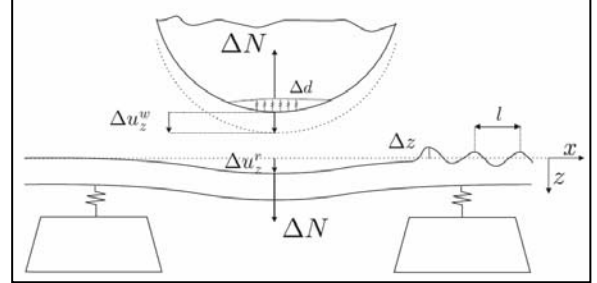


Figure 2.3 Contact roue - rail (Collette 2007)

Taux de glissement :

En supposant que $\Delta u(x, t) = \Delta U(x).e^{i\omega t}$, nous pouvons écrire les définitions des taux de glissement comme ci-dessous :

$$\begin{cases} \Delta \varepsilon_x = \frac{\Delta \dot{u}_x^w - \Delta \dot{u}_x^r}{V} = i\omega \frac{\Delta u_x^w - \Delta u_x^r}{V} = i\omega \frac{\Delta u_x}{V} \\ \Delta \varepsilon_y = \frac{\Delta \dot{u}_y^w - \Delta \dot{u}_y^r}{V} = i\omega \frac{\Delta u_y^w - \Delta u_y^r}{V} = i\omega \frac{\Delta u_y}{V} \end{cases} \quad (2.39)$$

Efforts tangentiels (loi exponentielle) :

Nous supposons ici une loi exponentielle pour les efforts tangentiels (cette loi est utilisée par Vincent et Tassily dans leur modèle linéaire).

$$F_i = \mu N \left(1 - e^{-\frac{C_0 \varepsilon_i}{\mu N^{1/3}}} \right) \quad (2.40)$$

où μ est le coefficient de frottement, N est la charge verticale.

Nous pouvons linéariser cette équation autour d'une référence :

$$\Delta F_i = \frac{\partial F}{\partial N} \Delta N + \frac{\partial F}{\partial v_i} \Delta v_i = \left[\frac{F_i}{N} + \left(\frac{F_i - \mu N}{N^{4/3}} \right) \frac{C_0 v_i}{3\mu} \right] \Delta N + \left[\frac{\mu N - F_i}{\mu N^{1/3}} C_0 \right] \Delta v_i$$

où :

$$\begin{cases} \Delta F_x = \alpha_x \Delta N + \beta_x \Delta v_x \\ \Delta F_y = \alpha_y \Delta N + \beta_y \Delta v_y \end{cases} \quad (2.41)$$

avec :

$$\alpha_i = \left[\frac{F_i}{N} + \left(\frac{F_i - \mu N}{N^{4/3}} \right) \frac{C_0 \nu_i}{3\mu} \right], \beta_i = \left[\frac{\mu N - F_i}{\mu N^{1/3}} C_0 \right] \quad (2.42)$$

Comportements cinématiques du système ferroviaire:

La dynamique du système voie - véhicule est prise en compte à travers les réceptances de la voie et du bogie. Ces réceptances sont mesurées en fixant des accéléromètres sur la surface du rail qui enregistrent les mouvements résultant d'une excitation à l'aide d'un marteau instrumenté.

D'une manière générale, un déplacement vertical du rail résulte soit de l'application d'une force verticale, soit d'une force latérale, par l'intermédiaire du couplage des deux directions imposé par la forme des profils (fig. 2.4).

$$\Delta u_z^r = -R_{zz}^r \Delta N - R_{zy}^r \Delta F_y \quad (2.43)$$

où Δu_z^r est le déplacement vertical du rail, R_{zz}^r est la réceptance directe du rail dans la direction verticale, R_{zy}^r est la réceptance couplée entre la direction verticale et la direction latérale.

Réciproquement, un déplacement latéral du rail est engendré soit par une force latérale, soit par une force verticale pour les mêmes raisons de couplage.

$$\Delta u_y^r = -R_{yz}^r \Delta N - R_{yy}^r \Delta F_y \quad (2.44)$$

En revanche, Il n'y a pas de couplage entre la direction x et les autres directions car on néglige le rayon de courbure du rail dans la direction longitudinale.

$$\Delta u_x^r = -R_{xx}^r \Delta F_x \quad (2.45)$$

De même, pour la rotation ;

$$\Delta u_\phi^r = -R_{\phi\phi}^r \Delta M \quad (2.46)$$

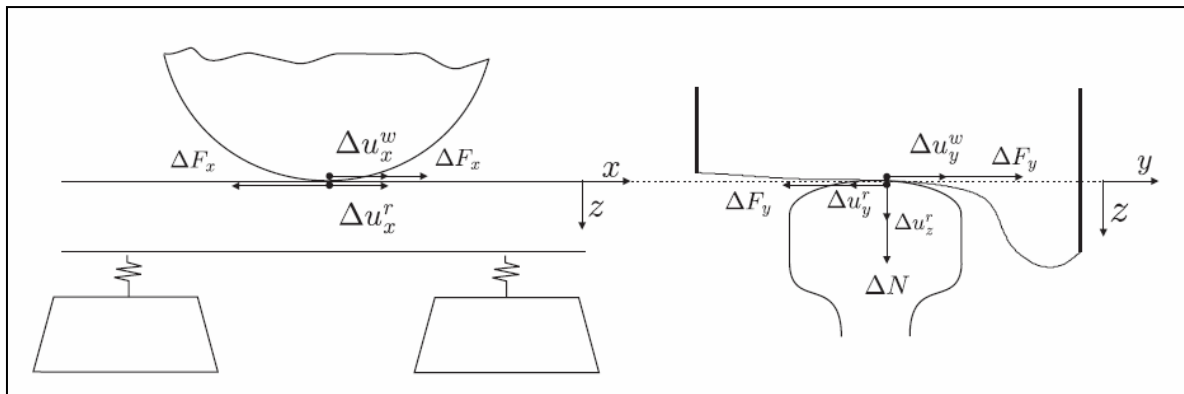


Figure 2.4 : Forces longitudinales et latérales dans le contact roue – rail (Collete 2007)

Nous pouvons faire de façon identique pour le bogie. Nous obtenons au final les équations cinématiques du système voie - véhicule suivantes :

Voie	Bogie
$\begin{cases} \Delta u_z^r = -R_{zz}^r \Delta N - R_{zy}^r \Delta F_y \\ \Delta u_y^r = -R_{yz}^r \Delta N - R_{yy}^r \Delta F_y \\ \Delta u_x^r = -R_{xx}^r \Delta F_x \\ \Delta u_\phi^r = -R_{\phi\phi}^r \Delta M \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u_z^w = R_{zz}^w \Delta N + R_{zy}^w \Delta F_y \\ \Delta u_y^w = R_{yz}^w \Delta N + R_{yy}^w \Delta F_y \\ \Delta u_x^w = R_{xx}^w \Delta F_x \\ \Delta u_\phi^w = R_{\phi\phi}^w \Delta M \end{cases}$

Notons :

$$\begin{cases} \Delta u_x = \Delta u_x^w - \Delta u_x^r \\ \Delta u_y = \Delta u_y^w - \Delta u_y^r \\ \Delta u_z = \Delta u_z^w - \Delta u_z^r \\ \Delta u_\phi = \Delta u_\phi^w - \Delta u_\phi^r \end{cases}, \quad \begin{cases} R_{xx} = R_{xx}^w + R_{xx}^r \\ R_{yy} = R_{yy}^w + R_{yy}^r \\ R_{zz} = R_{zz}^w + R_{zz}^r \\ R_{zy} = R_{zy}^w + R_{zy}^r \\ R_{yz} = R_{yz}^w + R_{yz}^r \\ R_{\phi\phi} = R_{\phi\phi}^w + R_{\phi\phi}^r \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$\begin{cases} \Delta u_z = R_{zz} \Delta N + R_{zy} \Delta F_y \\ \Delta u_y = R_{yz} \Delta N + R_{yy} \Delta F_y \\ \Delta u_x = R_{xx} \Delta F_x \\ \Delta u_\phi = R_{\phi\phi} \Delta M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_{zz} \Delta N - \Delta u_z + R_{zy} \Delta F_y = 0 \\ R_{yz} \Delta N - \Delta u_y + R_{yy} \Delta F_y = 0 \\ -\Delta u_x + R_{xx} \Delta F_x = 0 \\ -\Delta u_\phi + R_{\phi\phi} \Delta M = 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

Au final, nous avons toutes les équations du problème résumées ci-dessous :

$$\begin{cases} \Delta d + \Delta u_z = \Delta z \\ -k_c \Delta d + \Delta N = 0 \\ R_{zz} \Delta N - \Delta u_z + R_{zy} \Delta F_y = 0 \\ -\Delta u_x + R_{xx} \Delta F_x = 0 \\ \frac{i\omega}{V} \Delta u_x - \Delta \varepsilon_x = 0 \\ \alpha_x \Delta N + \beta_x \Delta \varepsilon_x - \Delta F_x = 0 \\ R_{yz} \Delta N - \Delta u_y + R_{yy} \Delta F_y = 0 \\ \frac{i\omega}{V} \Delta u_y - \Delta \varepsilon_y = 0 \\ \alpha_y \Delta N + \beta_y \Delta \varepsilon_y - \Delta F_y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad [\mathbf{R}] \cdot \{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{b}\} \quad (2.48)$$

Avec :

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{zz} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{zy} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & R_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{i\omega}{V} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_x & 0 & 0 & \beta_x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{yz} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & R_{yy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i\omega}{V} & -1 & 0 \\ 0 & \alpha_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_y & -1 \end{bmatrix}, \{X\} = \begin{cases} \Delta d \\ \Delta N \\ \Delta u_z \\ \Delta u_x \\ \Delta v_x \\ \Delta F_x \\ \Delta u_y \\ \Delta v_y \\ \Delta F_y \end{cases}, \{b\} = \begin{cases} \Delta z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

En utilisant **MAPLE** pour résoudre le système (2.48), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_x &= \frac{-i\omega k_c R_{xx} \alpha_x (-V + i\omega \beta_x R_{yy})}{(-i\omega k_c \beta_y R_{zy} R_{yz} - k_c \alpha_y V R_{zy} - k_c V R_{zz} - V + i\omega k_c \beta_y R_{yy} R_{zz} + i\omega \beta_y R_{yy})(i\omega \beta_x R_{xx} - V)} \Delta z \\ \Delta F_x &= \frac{-k_c V \alpha_x (-V + i\omega \beta_x R_{yy})}{(-i\omega k_c \beta_y R_{zy} R_{yz} - k_c \alpha_y V R_{zy} - k_c V R_{zz} - V + i\omega k_c \beta_y R_{yy} R_{zz} + i\omega \beta_y R_{yy})(i\omega \beta_x R_{xx} - V)} \Delta z \\ \Delta \varepsilon_y &= \frac{-i\omega k_c (R_{yz} + \alpha_y R_{yy})}{(-i\omega k_c \beta_y R_{zy} R_{yz} - k_c \alpha_y V R_{zy} - k_c V R_{zz} - V + i\omega k_c \beta_y R_{yy} R_{zz} + i\omega \beta_y R_{yy})} \Delta z \\ \Delta F_y &= \frac{-k_c (i\omega \beta_y R_{yz} + \alpha_y V)}{(-i\omega k_c \beta_y R_{zy} R_{yz} - k_c \alpha_y V R_{zy} - k_c V R_{zz} - V + i\omega k_c \beta_y R_{yy} R_{zz} + i\omega \beta_y R_{yy})} \Delta z \end{aligned}$$

Nous pouvons calculer la puissance de glissement dans la zone de contact à l'aide de la formule suivante :

$$\Delta P = V(\Delta(\varepsilon_x F_x) + \Delta(\varepsilon_y F_y)) = V(F_x \Delta \varepsilon_x + \varepsilon_x \Delta F_x + F_y \Delta \varepsilon_y + \varepsilon_y \Delta F_y) \quad (2.50)$$

La matière usée sur la surface du rail après le n^{ieme} passage du train est proportionnelle à l'énergie de glissement:

$$\boxed{\frac{\partial(\Delta z)}{\partial n} = -\frac{k_0}{2\rho b V} \Delta P = G(f) \Delta z} \quad (2.51)$$

Le paramètre $G(f)$ est appelé « taux d'usure ondulatoire ». Il permet de prédire la fréquence la plus favorable à la création de l'usure ondulatoire sur la surface du rail.

En modélisant la rugosité de la surface du rail par une fonction périodique, puis en utilisant la décomposition de Fourier, nous pouvons suivre l'évolution du profil du rail et l'amplitude de l'usure ondulatoire. Cependant, nous nous sommes arrêtés au calcul du taux d'usure ondulatoire.

2.1.5. RCF du rail

La procédure globale pour un calcul des fissures par fatigue de roulement du rail est résumée dans le schéma ci-dessous (fig. 2.5).

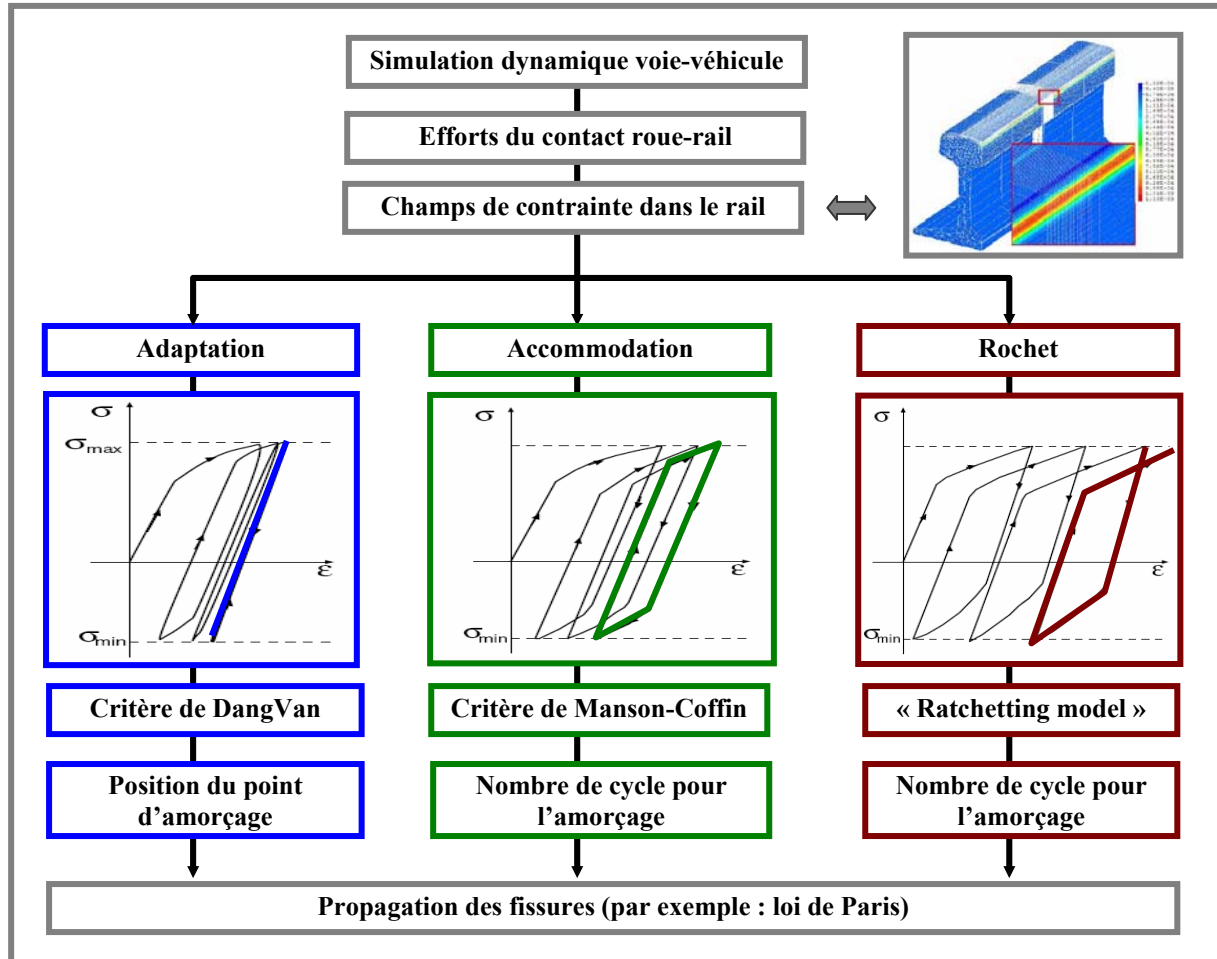


Figure 2.5 : Procédure globale d'un calcul des fissures par fatigue de roulement du rail

Pour les matériaux élastiques plastiques parfaits et dans le cadre d'un chargement de Hertz de forme circulaire, nous pouvons utiliser la méthode « shakedown map » pour prédire la possibilité d'avoir l'initiation des fissures sur la surface du rail. Cependant, pour les matériaux élasto-plastiques avec écrouissage et chargements complexes, la méthode stationnaire de MAITOURNAM doit être utilisée. Cette méthode a été implantée dans un code de calcul éléments finis par Cauberghe (2010).

Méthode stationnaire

Pour les structures soumises à un chargement se déplaçant à vitesse fixe, une méthode appelée méthode stationnaire a été développée par M. Maitournam. Elle s'applique parfaitement au cas étudié

d'une charge elliptique sur un rail. Elle consiste à se placer dans le repère lié à la charge, et à ajouter une force d'inertie d'entraînement volumique dans le matériau. L'intérêt est de supprimer la dépendance en temps dans les équations. En effet, la dérivée temporelle d'un vecteur A s'écrit :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \underline{V} \cdot \underline{\text{grad}} A = V \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2.52)$$

Le problème est alors résolu en imposant une force statique sur le rail et en résolvant les équations du problème de la droite vers la gauche. Les conditions initiales en terme de déformations plastiques et de variables internes sont données par les déformations plastiques et variables internes en $x = +\infty$.

Les équations du problème sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \vec{u} + {}^t \vec{\nabla} \vec{u}) & \text{dans } \Omega \quad \text{compatibilité} \\ \vec{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho \vec{F} = \rho V^2 \cdot \vec{u}_{,xx} & \text{dans } \Omega \quad \text{équilibre} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\sigma}}^i, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_{,x}^p = -\lambda \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}}, A_k)}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} & \text{comportement} \\ A = Z : a, \quad a_{k,x} = \lambda \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}}, A_k)}{\partial A_k} & \text{comportement} \\ \lambda \geq 0, \quad f(\underline{\underline{\sigma}}, A_k) \leq 0, \quad \lambda f(\underline{\underline{\sigma}}, A_k) = 0, \quad \lambda f_{,x}(\underline{\underline{\sigma}}, A_k) = 0 & \text{comportement} \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T}^d \quad \text{sur } \partial_F \Omega \quad \text{et} \quad \vec{u} = \vec{u}^d \quad \text{sur } \partial_D \Omega & \text{conditions aux Limites} \\ \underline{\underline{\sigma}}(\vec{x}, 0) = \underline{\underline{\sigma}}^0(\vec{x}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^p(\vec{x}, 0) = \underline{\underline{\varepsilon}}^{p0}(\vec{x}) & \text{conditions initiales} \end{array} \right. \quad (2.53)$$

f , a_k et A_k dépendent du modèle d'écrouissage choisi. Néanmoins, on peut donner une forme générale du critère de plasticité f : $f(\underline{\underline{\sigma}}, a_k) = \|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}\|_{eq} - R(p) - \sigma_Y$ où $\underline{\underline{X}}$ est le centre de la zone d'élasticité, dépendant de a_k , et p la déformation plastique cumulée.

La formulation variationnelle du problème s'écrit : Trouver $\underline{u} \in C(\underline{u}^d)$ tel que pour tout champ $\underline{w} \in C(0)$, on ait ;

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{w}) dV = \int_{S_T} \underline{T}^d \cdot \underline{w} dS + \int_{\Omega} -\rho V^2 \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} \cdot \underline{w} dV \quad (2.54)$$

Comparons les ordres de grandeur des termes de la première et de la dernière intégrale grâce au rapport r (C_s désigne la célérité des ondes mécaniques dans l'acier, h la taille caractéristique des mailles, Δx la distance typique entre 2 colonnes).

$$r = \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}}) : \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{w}})}{\rho V^2 \frac{\partial^2 \underline{\underline{u}}}{\partial x^2} \cdot \underline{\underline{w}}} \approx \frac{E/h^2}{\rho V^2 / \Delta x^2} \approx \left(\frac{C_s}{V} \right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta x}{h} \right)^2 \quad (2.55)$$

Or $\Delta x \approx h$, donc $r \approx (C_s / V)^2$ et comme $C_s \approx 6000$ km/h pour l'acier, on a $r \gg 1$.

Nous choisissons donc de traiter le problème en quasi-statique. La formulation variationnelle devient :
Trouver $\underline{\underline{u}} \in C(\underline{\underline{d}})$ tel que pour tout champ $\underline{\underline{w}} \in C(0)$ on ait

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}}) : \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{w}}) dV = \int_{S_T} \underline{\underline{T}}^d \cdot \underline{\underline{w}} dS \quad (2.56)$$

On retrouve la formulation habituelle. La différence est que le problème est résolu numériquement de proche en proche de la droite vers la gauche dans le maillage.

L'algorithme effectue plusieurs calculs élasto-plastiques afin de trouver la solution stationnaire. Un calcul se déroule de la manière suivante :

Les déformations plastiques et variables internes sont données dans la colonne 1 ($x = +\infty$) soit par l'utilisateur au premier calcul soit via le résultat des calculs précédents.

Pour la colonne $n+1 > 1$, on calcule le critère de plasticité en chaque point de Gauss. S'il est respecté ($f < 0$) on a $\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^p = \underline{\underline{\varepsilon}}_n^p$, $\alpha_{k,n+1} = \alpha_{k,n}$. Sinon ($f > 0$), on calcule les incréments des déformations plastiques et des variables internes; on a $\underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^p = \underline{\underline{\varepsilon}}_n^p + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^p$, $\alpha_{k,n+1} = \alpha_{k,n} + \Delta \alpha_{k,n}$. Voir DangVan et Maitournam (1993, 1996) pour plus de détails.

L'algorithme converge lorsque les deux conditions d'arrêt sont vérifiées :

- Le critère de plasticité est respecté en tout point.
- Les déformations plastiques sont stationnaires. C'est à dire qu'on retrouve le même état plastique en amont et en aval de la roue : $\underline{\underline{\varepsilon}}^p(x = -\infty) = \underline{\underline{\varepsilon}}^p(x = +\infty)$

Il convient alors de préciser ce que fait l'algorithme entre deux calculs élasto-plastiques. Il y a deux possibilités : le méthode passage par passage (méthode indirecte) et la méthode directe.

Méthode passage par passage (méthode indirecte) : Cette méthode calcule le résultat à chaque passage de roue. Chaque passage requiert éventuellement plusieurs calculs élasto-plastiques entre lesquels on conserve le champ de déformations plastiques précédent puis on effectue une nouvelle prédiction élastique. Les déformations plastiques dans la colonne 1 au calcul $i+1$ sont celles trouvées

au calcul i dans cette même colonne. L'opération est répétée tant que le critère de plasticité n'est pas respecté partout.

Ensuite, entre deux passages, on récupère la déformation plastique en $x = -\infty$ et on l'impose dans toutes les autres colonnes du maillage. On a ainsi le rail tel qu'il est réellement entre deux passages. Puis on effectue une nouvelle prédiction élastique, point de départ du calcul du passage suivant. L'algorithme converge lorsque les déformations plastiques en $x = -\infty$ sont identiques entre deux passages de roue successifs.

Cette méthode a l'avantage d'être exacte en dehors de l'approximation des éléments finis. La preuve en a été fournie par MM. DangVan et Maitournam (1993). Cependant, elle demande un certain temps de calcul.

Méthode directe : Cette méthode ne différencie pas les passages des roues. Il s'agit d'effectuer successivement des calculs élasto-plastiques mais cette fois en imposant en $x = +\infty$ pour le calcul $i+1$ les déformations plastiques trouvées en $x = -\infty$ à la fin du calcul i .

A la fin de chaque calcul, on teste si les déformations plastiques en $x = -\infty$ et en $x = +\infty$ sont identiques. Si c'est le cas on vérifie alors le critère de plasticité. Si ce dernier est respecté partout, l'algorithme converge. Si l'une des deux conditions d'arrêt n'est pas vérifiée, on passe au calcul suivant.

Cette méthode nécessite un temps de calcul réduit. Elle conduit au même résultat que la méthode indirecte en ce qui concerne la nature du régime asymptotique. En revanche, l'amplitude des déformations plastiques et autres champs solutions n'est pas la même qu'avec la méthode indirecte dont l'exactitude a été montrée.

Régime asymptotique : Une fois la solution stationnaire trouvée avec l'une des méthodes décrites ci-dessus, il ne reste plus qu'à déterminer la nature du régime asymptotique atteint. Le cas d'un régime purement élastique est évident puisque le critère de plasticité est vérifié dès le début. L'algorithme n'effectue pas de calcul élasto-plastique.

Pour l'adaptation et l'accommodation, on prend le champ solution de déformations plastiques. On extrait les déformations plastiques de la colonne 1 puis, on les compare aux déformations plastiques

des autres colonnes. Si elles sont toujours identiques, cela signifie qu'elles n'évoluent pas lors d'un cycle de chargement ; c'est un cas d'adaptation. Si il y a au moins une colonne pour laquelle elles diffèrent, cela signifie qu'elles évoluent lors d'un cycle de chargement mais qu'elle finissent dans le même état qu'au début du cycle ; c'est un cas d'accommodation. Pour le rochet, le test d'arrêt de stationnarité n'est jamais vérifié, l'algorithme ne converge pas.

2.2. Présentation de l'outil numérique CONUS

Nous présentons dans cette partie l'outil numérique CONUS (CONTACT-Usure), développé sous MATLAB. Les modèles mathématiques utilisés dans cet outil sont ceux présentés précédemment. Les interfaces ont été créées afin de faciliter l'introduction des données d'entrée et l'affichage des résultats. L'interface principale de ce programme est illustrée ci-dessous (fig. 2.6). Il y a quatre blocs principaux dans la partie gauche : Problème de contact roue – rail ; Problème d'usure abrasive du rail ; Problème d'usure ondulatoire du rail ; Post-traitement des calculs dynamiques ferroviaires. Quand on appuie sur un bouton, une autre interface correspondant au problème choisi va apparaître.

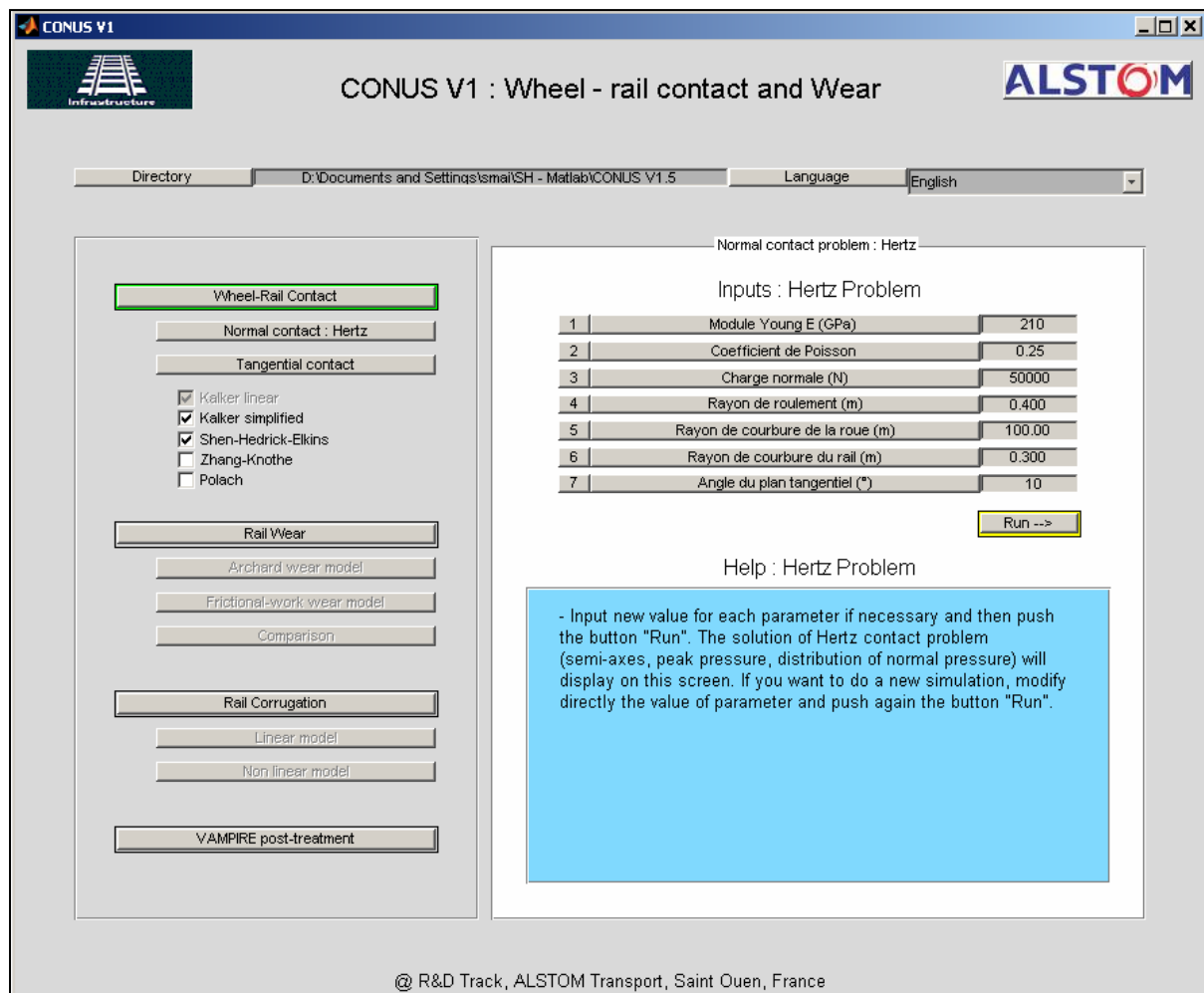


Figure 2.6 : Interface principale de CONUS

2.2.1. Problème de contact roue - rail

a. Contact de Hertz

La théorie de Hertz a été présentée dans la section 2.1.1. Les données d'entrée du problème sont : le module d'Young, le coefficient de Poisson, la charge normale appliquée sur le rail, le rayon de roulement de la roue, le rayon de courbure de la roue, le rayon de courbure du rail, l'angle du plan tangentiel au niveau du contact. Les résultats de cette théorie sont : la taille de l'ellipse de contact, la distribution des pressions ainsi que la pression maximale dans la zone de contact.

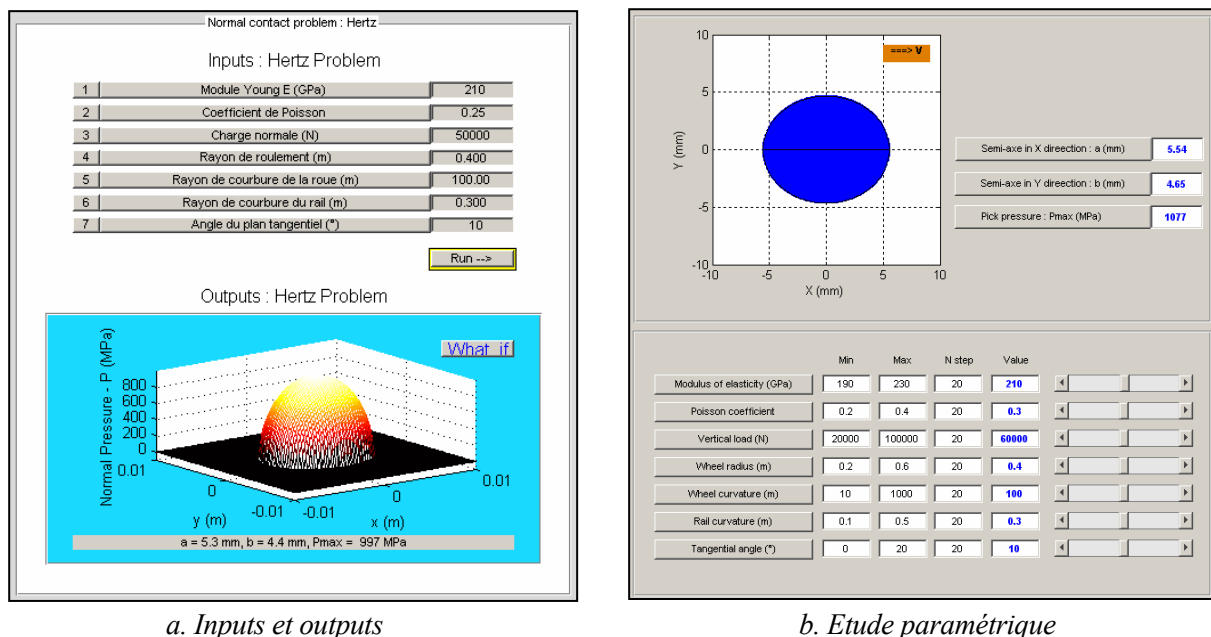


Figure 2.7 : Interfaces pour le contact de Hertz

Nous avons créé deux interfaces pour le contact de Hertz (fig. 2.7) : les données d'entrée et les résultats sont affichés sur l'interface 2.7a ; tandis que l'interface 2.7b permet de faire varier les données d'entrée et d'afficher les résultats correspondants. Quelques résultats sont donnés dans le tableau 2.1.

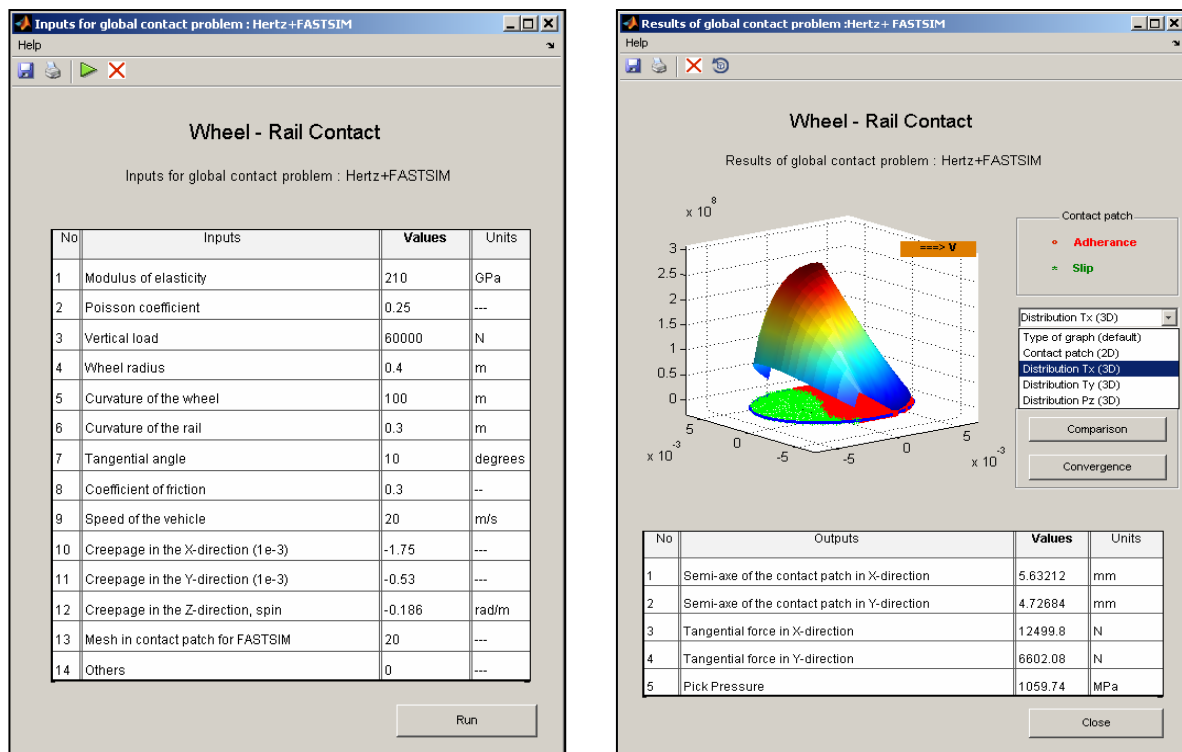
F (KN) Charge	R _{roue} (mm) Rayon de roulement	R _{croue} (mm) Rayon de courbure	R _{crail} (mm) Rayon de courbure	a (mm) Demi-axe OX	b (mm) Demi-axe OY	P _{max} (MPa) Pression maximale
60	460	+∞	300	6.13	4.57	1021
60	460	+∞	80	6.99	2.36	1735
60	460	-330	300	4.02	13.96	510
60	300	+∞	300	5.09	4.80	1172
60	150	+∞	300	3.55	5.37	1504
60	150	+∞	80	4.32	2.86	2321
60	150	-330	80	4.29	3.20	2091
100	460	+∞	300	7.27	5.42	1211
100	460	+∞	80	8.29	2.80	2057

Tableau 2.1 : Contact de Hertz avec CONUS

b. Problème tangentiel

Pour le problème tangentiel, les données d'entrée sont : le module d'Young, le coefficient de Poisson, la charge normale appliquée sur le rail, la taille de l'ellipse (calculée par la théorie de Hertz), le coefficient de frottement, les taux de glissement (calculés par un modèle « multicorps » - VAMPIRE, VOCO, SIMPACK,..., ou par mesure).

Nous avons créé deux interfaces pour les données d'entrée et les résultats (fig. 2.8). Pour les résultats, nous avons le choix d'afficher différents types de graphes (2D, 3D, Tx, Ty,...).



a. Interface pour les données d'entrée

b. Interface pour afficher les résultats

Figure 2.8 : Interfaces du problème tangentiel du contact roue - rail

Nous avons aussi deux boutons qui concernent les résultats dans l'interface:

- Le bouton « Convergence » : permet d'estimer le nombre d'éléments nécessaires pour discrétiser dans la zone de contact pour obtenir une bonne précision (fig. 2.9a).
- Le bouton « Comparaison » : permet de comparer les résultats calculés par FASTSIM et ceux calculés par la théorie de Shen-Hedrick-Elskin et par la théorie linéaire de Kalker (fig. 2.9b).

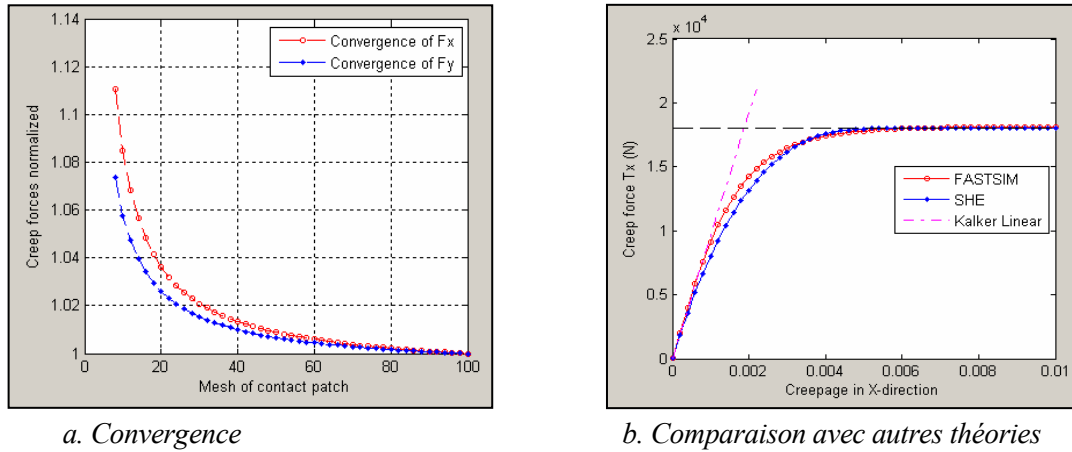


Figure 2.9 : Algorithme FASTSIM

Dans le tableau 2.2, nous présentons quelques résultats obtenus par CONUS pour le problème tangentiel du contact roue - rail avec : $E = 210(\text{GPa})$, $\nu = 0.25$, $\text{frot} = 0.3$. F est la charge normale, a et b sont les demi-axes, T_x et T_y sont les efforts tangentiels longitudinal et transversal.

F (kN) Charge	a (mm) Demi-axe OX	b (mm) Demi-axe OY	ϵ_x Glissement OX	ϵ_y Glissement OY	ϵ_ϕ (rad/m) Spin	T_x (KN) Axe OX	T_y (KN) Axe OY	Zones - Adhérence ● - Glissement *
60	6.13	4.57	-1.75e-3	-0.53e-3	-0.4	11	6.2	
60	6.13	4.57	-1.75e-3	-0.53e-3	-0.186	12.9	5.3	
60	6.13	4.57	-1.75e-3	-0.53e-3	0.186	12.6	1.9	
60	6.13	4.57	-1.75e-3	-0.53e-3	0	13.3	3.7	
60	6.13	4.57	-1.75e-3	0	0	13.6	0	
60	6.13	4.57	-6e-3	0	0	17.8	0	
60	6.13	4.57	-12e-3	0	0	18	0	

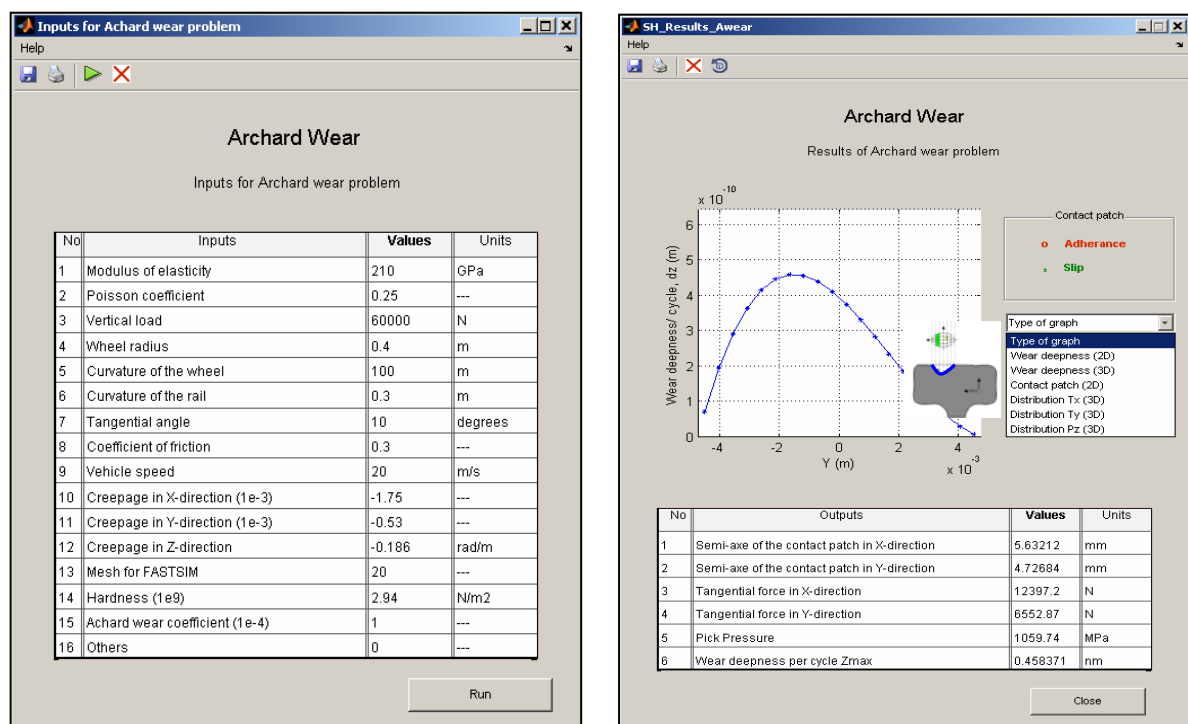
Tableau 2.2 : Problème tangentiel avec CONUS

Les résultats présentés dans le tableau 2.2 nous montrent bien les deux zones (d'adhérence et de glissement) dans le contact. Nous voyons aussi l'influence de « spin » à travers les quatre premiers cas. Les cas 2 et 3 montrent bien l'influence du signe de spin. De plus, le cas 4 montre que, sans spin, le contact est symétrique par rapport à la direction de mouvement OX (ce qui est évident). Enfin, le dernier cas montre qu'avec un taux de glissement assez grand, nous avons un glissement total dans la zone de contact.

2.2.2. Problème d'usure abrasive du rail

L'usure continue est calculée après chaque passage du train en utilisant la loi d'Archard ou la loi d'énergie de glissement. Cela permet d'estimer la profondeur d'usure dans le plan vertical-latéral après un passage.

Quand on appuie sur le bouton « Rail wear » dans l'interface principale de CONUS (fig. 2.6), les interfaces du problème d'usure continue vont apparaître (fig. 2.10). Pour les résultats, nous avons le choix d'afficher différents types de graphes (2D, 3D, Tx, Ty,...).



a. Interface pour les données d'entrée

b. Interface pour afficher les résultats

Figure 2.10 : Interface du problème d'usure abrasive

En appuyant sur le bouton « comparaison » dans l'interface principale de CONUS (fig. 2.6), l'interface suivante va apparaître (fig. 2.11).

Nous pouvons comparer les résultats obtenus par la loi d'Archard et ceux obtenus par la loi d'énergie de glissement. Nous voyons bien que les courbes obtenues par ces deux lois coïncident si $\frac{k}{H} = \frac{C_w \cdot \mu}{\rho}$

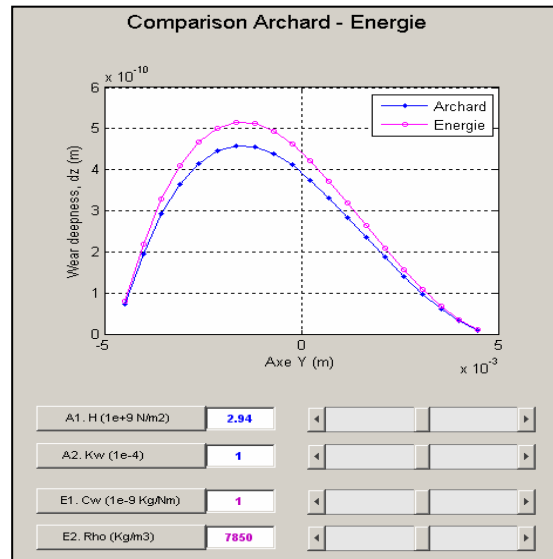
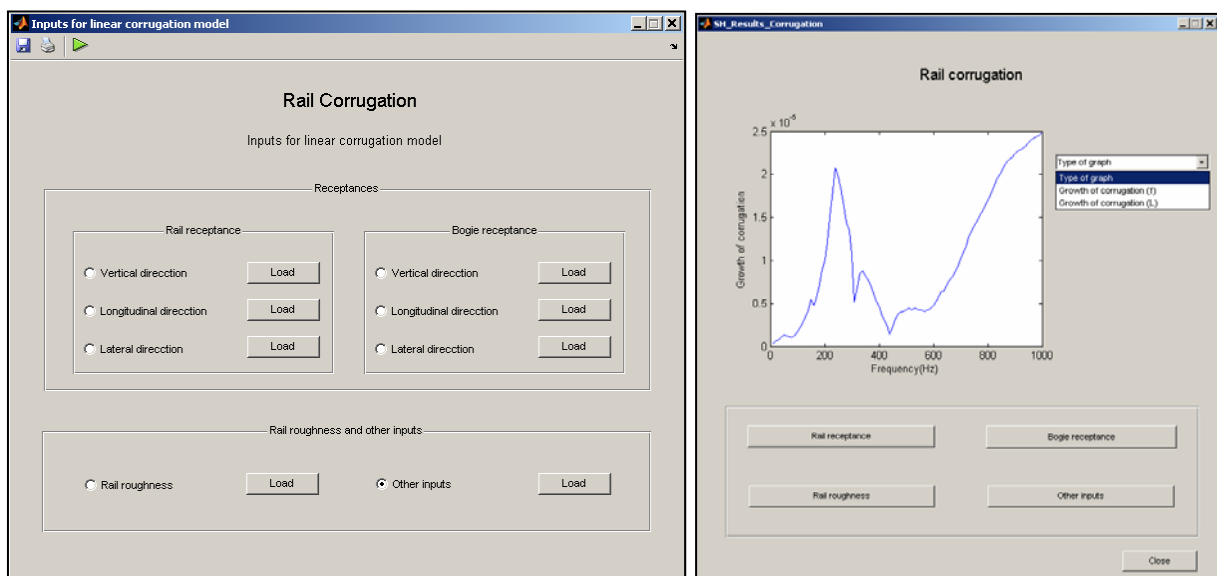


Figure 2.11 : Comparaison de deux lois d'usure

2.2.3. Problème d'usure ondulatoire du rail

Le modèle linéaire présenté dans la partie 2.1.4 est implanté dans notre outil CONUS. Les interfaces ci-dessous ont été créées pour ce problème (fig. 2.12).



a. Interface pour les données d'entrée

b. Interface pour afficher les résultats

Figure 2.12 : Interfaces du problème d'usure ondulatoire

Les réceptances sont des données d'entrée pour notre modèle. Nous prenons ici les valeurs existantes dans la littérature, par exemple celles de Hempelmann et Knothe, de Gomez et Vadillo,...

Un exemple de calcul du taux d'usure ondulatoire, utilisant les courbes de réceptance de Gomez-Vadillo, est présenté ci-dessous (fig. 2.13).

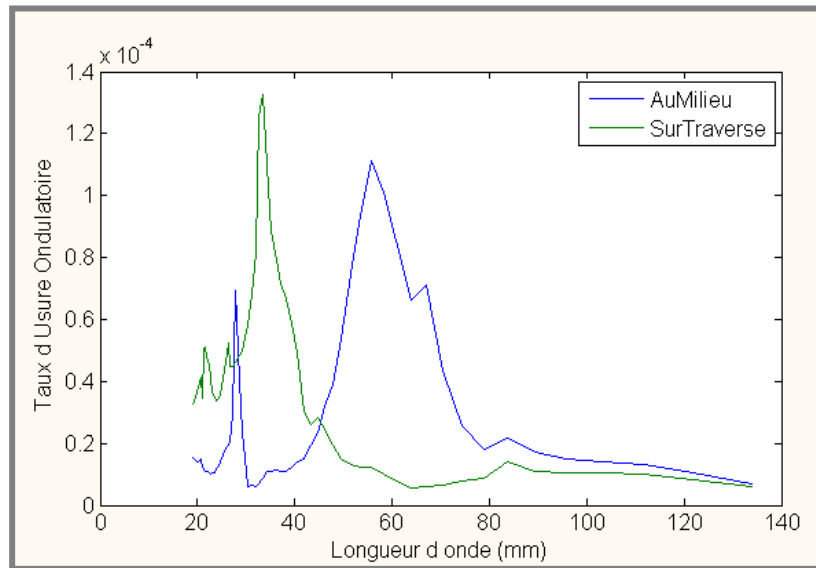


Figure 2.13 : Taux d'usure ondulatoire calculé par CONUS

Ces résultats sont comparables avec ceux calculés par Gomez et Vadillo. Nous voyons bien dans la figure 2.13 que l'usure ondulatoire se développe pour certaines longueurs d'onde (environ 50 mm dans la zone entre deux traverses et 35 mm dans la zone autour d'une traverse).

2.2.4. Problème de RCF du rail

Nous avons implanté la méthode stationnaire de Maitournam dans un code de calcul éléments finis pour calculer l'état asymptotique du rail.

Pour représenter une portion de rail en 2D, nous nous appuyons sur un simple rectangle. Il faut alors choisir : les dimensions de ce rectangle, la taille des éléments afin que le maillage ne soit pas trop grossier, et le type d'éléments.

Puisqu'il faut créer un maillage constitué de colonnes verticales, on opte pour des éléments rectangulaires à 8 points (QUA8). On aurait très bien pu prendre des éléments à 4 points (QUA4).

La taille du morceau de rail modélisé doit être suffisamment grande devant la taille du contact roue - rail. D'autre part, le maillage doit être suffisamment fin sous la zone de contact. Pour ne pas

surcharger la mémoire de l'ordinateur, nous avons créé un maillage à densité variable avec un raffinement autour de la zone de chargement (fig. 2.14)

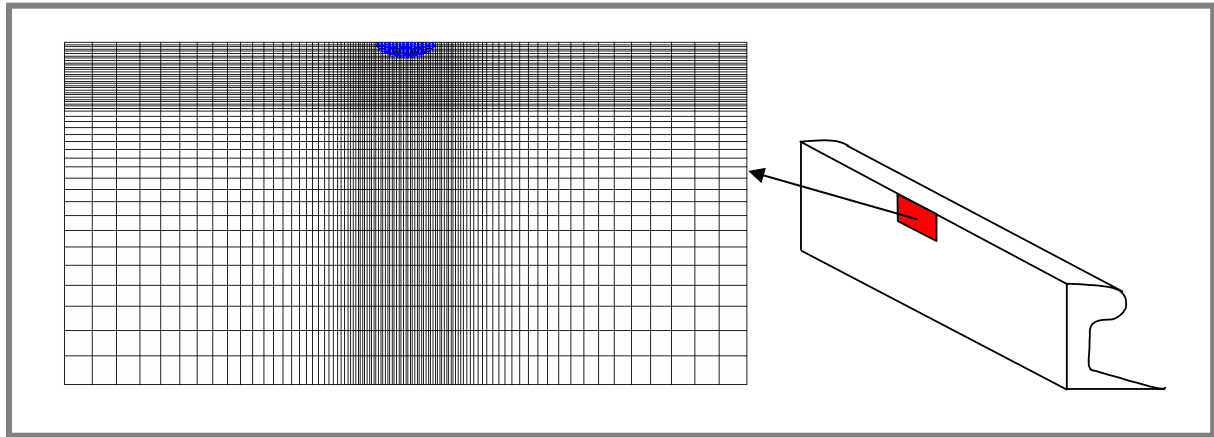


Figure 2.14 : Maillage

Nous présentons les résultats de déformations plastiques pour un cas d'adaptation et un cas d'accommodation (fig. 2.15). Pour le cas d'adaptation, les déformations plastiques n'évoluent pas au cours d'un cycle : elles sont constantes le long de toute ligne horizontale. Pour le cas d'accommodation, nous voyons nettement, sous la zone de contact roue - rail, que les déformations plastiques évoluent.

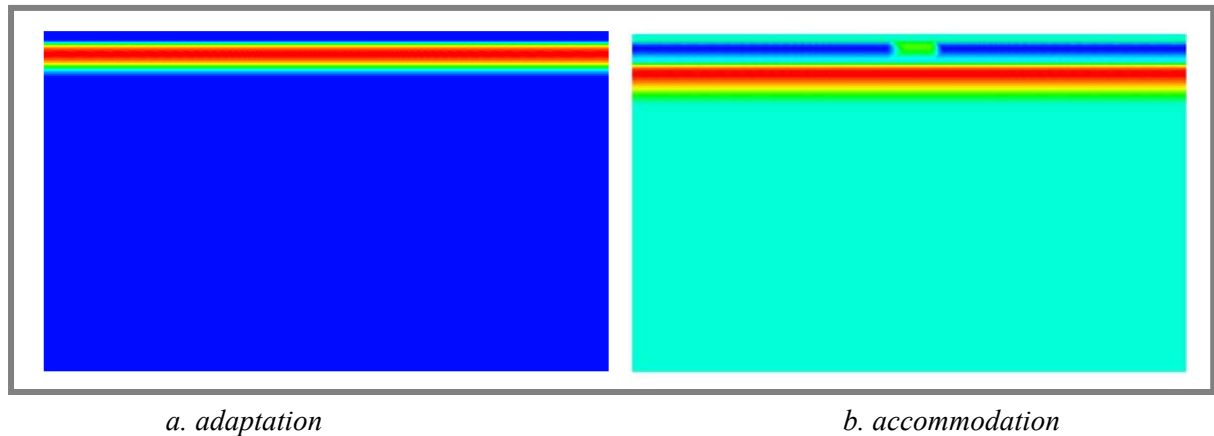


Figure 2.15: déformation plastique XY

Pour les matériaux élasto-plastiques avec écrouissage cinématique linéaire, nous avons montré que le module d'écrouissage ainsi que la taille du contact (cas 2D) n'ont pas d'influence notable sur la limite d'adaptation.

Pour étudier l'influence des efforts tangentiels, nous présentons les résultats (2D, équivalent à « line contact ») sous la forme « shakedown map » (fig. 2.16)

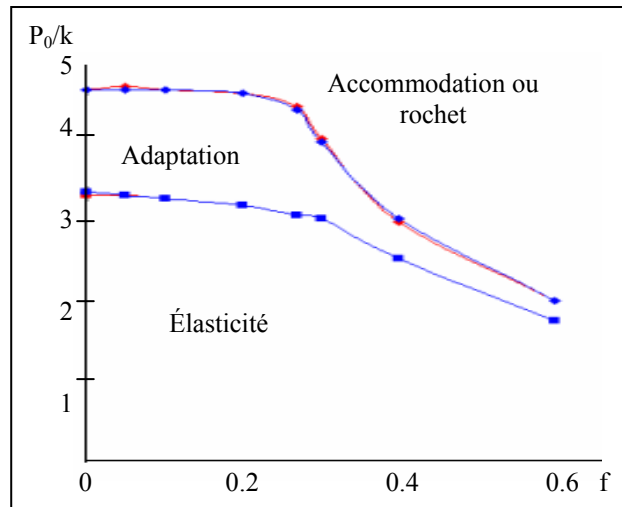


Figure 2.16 : Résultats numériques - « Shakedown map » - Matériau à écrouissage linéaire

Pour le cas « cinématique linéaire et isotrope linéaire combinés », lorsque le module d'écrouissage isotrope H_{iso} est non nul, nous obtenons toujours de l'adaptation, sauf si le module d'écrouissage isotrope est très petit devant le module d'écrouissage cinématique. Par exemple : Si $H_{iso}=10\text{MPa}$, $H_{ciné}=100\text{MPa}$, nous n'avons que l'adaptation; si $H_{iso}=1\text{MPa}$, $H_{ciné}=100\text{MPa}$, on retrouve le comportement de l'écrouissage cinématique linéaire. La partie isotrope est négligeable.

Pour le cas 3D, nous faisons le maillage ci-dessous (fig. 2.17a):

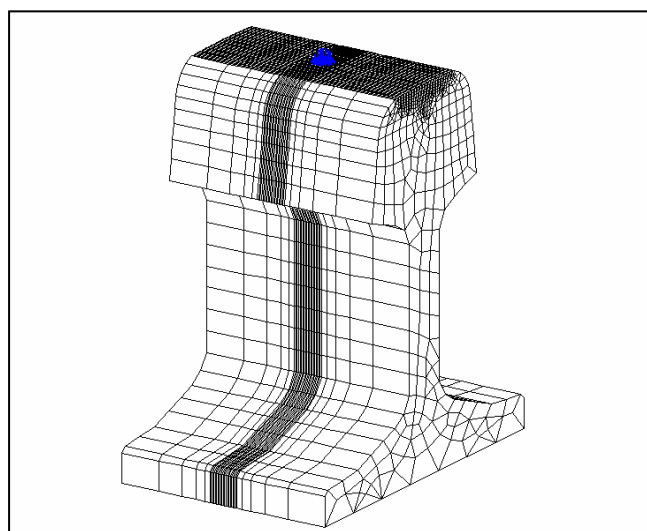


Figure 2.17 : Maillage 3D du rail

Nous observons la succession classique de régimes asymptotiques : élasticité, adaptation, accommodation.

Ci-dessous quelques résultats de déformations plastiques du rail en adaptation (fig. 2.18).

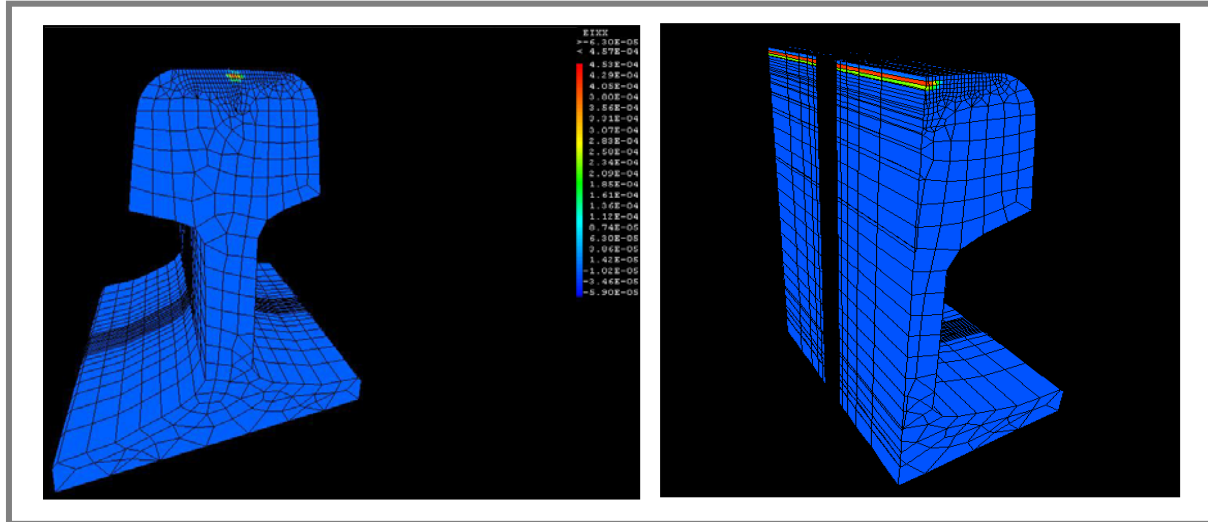


Figure 2.18 : Déformation plastique XX en adaptation

En faisant varier le coefficient de frottement et le facteur de charge, nous obtenons la carte des régimes asymptotiques (shakedown map) du matériau élasto-plastique avec l'écrouissage cinématique linéaire (nous ne présentons que la limite d'adaptation dans cette carte) (fig. 2.19).

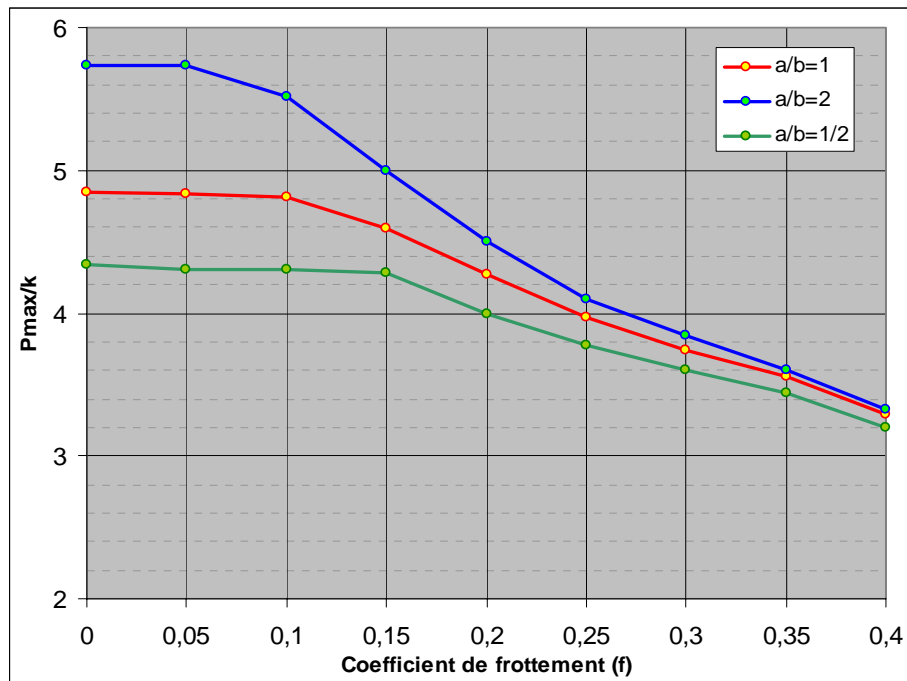


Figure 2.19 : Limite d'adaptation du rail en fonction du rapport a/b

Nous voyons bien que le rapport a/b des demi-axes de l'ellipse de contact est un paramètre très important pour la limite d'adaptation si le coefficient de frottement est petit. Ce rapport a/b a moins d'influence si le coefficient de frottement est grand. Ces résultats peuvent être utilisés avec les calculs dynamiques ferroviaires pour prédire le risque d'initiation des fissures par fatigue de roulement du rail.

Pour un calcul complet de la fatigue de roulement du rail, il faut suivre la procédure présentée dans la section 2.1.5 (fig. 2.5). Cependant, ce n'est pas l'objectif de cette thèse.

Conclusions et perspectives

Dans cette partie, nous avons dans un premier temps effectué une recherche bibliographique sur différents problèmes de dégradation du rail : contact roue - rail, usure abrasive du rail, usure ondulatoire du rail et fatigue de roulement du rail.

L'origine des défauts du rail étant le contact roue - rail, nous avons tout d'abord réalisé une étude détaillée de ce problème afin de bien appréhender les phénomènes du contact roue - rail ainsi que les efforts dynamiques transmis dans la voie ferrée.

Les mécanismes, les méthodes de traitement ainsi que les modèles mathématiques de prédiction des problèmes d'usure et de fatigue du rail ont été discutés en détail dans le chapitre 1.

Nous avons présenté, dans le chapitre 2, les théories et les modèles choisis pour développer notre outil numérique, CONUS.

La théorie de Hertz permet de résoudre le problème normal du contact roue –rail. La théorie simplifiée de Kalker avec l'algorithme FASTSIM est utilisée pour trouver le comportement local (glissement ou adhérence) dans la zone de contact, ainsi que les efforts tangentiels.

Afin de calculer l'usure abrasive du profil des rails, nous pouvons utiliser la théorie d'Archard ou la méthode de calcul de l'énergie dissipée dans la zone de contact. Ces deux méthodes sont implantées dans notre outil CONUS.

Un modèle linéaire est choisi pour prédire l'usure ondulatoire du rail. Ce modèle permet de trouver les fréquences de vibration du système voie – véhicule qui favorisent la formation de l'usure ondulatoire sur la surface du rail.

Les résultats numériques calculés par CONUS sont en tout point comparables avec ceux que l'on trouve dans la littérature. Cela constitue une première étape de validation de ce programme.

Afin de disposer d'un outil industriel, nous avons développé les interfaces graphiques avec MATLAB. Il permet de faciliter la mise en donnée des problèmes et d'afficher les résultats rapidement.

Pour le problème de fatigue de roulement du rail, dans le cas où nous ne possédons pas les caractéristiques élasto - plastiques du matériau et où la forme du contact est circulaire, nous pouvons utiliser la méthode « shakedown map » pour prédire le risque d'initiation des fissures par fatigue. Cependant, pour le contact roue-rail, la zone de contact est en général une ellipse et le matériau du rail est élasto - plastique avec écrouissage. C'est pourquoi nous devons utiliser une méthode numérique (méthode stationnaire) pour déterminer l'état asymptotique du rail. Les résultats obtenus montrent bien l'influence de la taille du contact (rapport a/b).

Afin de faire un calcul complet de la fatigue de roulement du rail, il faut suivre la procédure présentée dans la partie 2.1.5 (fig. 2.5). Cette méthode permet d'avoir plus de détails sur la position du point d'amorçage des fissures, le nombre de cycles pour l'amorçage ainsi que la propagation des fissures. Cependant, il faut identifier un grand nombre de paramètres du matériau. De plus, poursuivre ce schéma de calcul est très consommateur en temps pour la compréhension du problème d'une part, et pour les calculs numériques d'autre part.

Pour les chargements élevés (TGV, fret, inter-cité), la méthode « empirique » T-gamma se révèle être la plus simple et rapide permettant de prédire le risque d'initiation des fissures. Un autre avantage de cette méthode est qu'elle prend en compte la compétition entre l'usure et la fatigue. De plus, il est aisé de l'intégrer dans des logiciels de calculs dynamiques multicorps.

Partie 2

Fatigue des dalles ferroviaires en béton

Sommaire général de la partie 2

Chapitre 3 : Revue bibliographique - Fatigue du béton	73
3.1. Introduction	74
3.2. Matériau béton – Présentation générale.....	76
3.3. Matériau béton – approches empiriques pour la fatigue.....	80
3.4. Matériau béton – approches théoriques pour la fatigue.....	86
3.5. Conclusions	95
Chapitre 4 : Endommagement par fatigue du matériau béton.....	97
4.1. Introduction	98
4.2. Modèles théoriques	99
4.3. Résultats numériques	105
4.4. Etude expérimentale de la fatigue du béton.....	114
4.5. Application – Dimensionnement des dalles ferroviaires en béton.....	122
4.6. Conclusions	126
Chapitre 5 : Propagation des fissures du béton – Lattice model	127
5.1. Théorie des équivalences	128
5.2. Implantation numérique.....	135
5.3. Propagation des fissures sous chargement statique	143
5.4. Propagation des fissures par fatigue	152
5.5. Conclusions	155

Chapitre 3

Revue bibliographique - Fatigue du béton

Sommaire du chapitre 3

3.1. Introduction	74
3.2. Matériau béton – Présentation générale.....	76
3.2.1. Constituants du béton	76
3.2.2. Comportements mécaniques typiques du béton	77
3.3. Matériau béton – approches empiriques pour la fatigue.....	80
3.3.1. Fatigue du béton : investigations expérimentales.....	80
3.3.2. Modélisations de la courbe de Wöhler pour le béton	82
3.4. Matériau béton – approches théoriques pour la fatigue.....	86
3.4.1. Application de la mécanique de l'endommagement pour étudier la fatigue du béton ...	86
3.4.2. Application de la mécanique de la rupture pour étudier la fatigue du béton	90
3.5. Conclusions	95

3.1. Introduction

Les travaux sur la problématique de la fatigue du béton ont commencé au début du 20^e siècle avec le développement du béton armé sur les ponts ferroviaires (pour rappel : l'étude sur la fatigue de l'acier date du milieu du 19^e siècle). Les structures en béton armé sont souvent soumises à des chargements en flexion, et, pour ce mode de chargement, les armatures travaillent en traction, tandis que le béton travaille en compression. C'est pourquoi, on ne s'est intéressé à cette époque qu'à la fatigue du béton en compression.

A partir de 1920, avec le développement des autoroutes et des routes pour la circulation des poids lourds, souvent en béton non-armé, la fatigue du béton en traction et en flexion fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Les ponts ferroviaires, les ponts routiers et les routes subissent souvent de 10^5 à 10^7 cycles de chargement. La fatigue du béton à grand nombre de cycle (10^5 - 10^7 cycles) est le domaine qui intéresse les chercheurs à cette époque. Comme le béton rompt toujours dans ce domaine de chargement, on considère alors que le matériau béton n'a pas de limite d'endurance jusqu'à 10^7 cycles de chargement (pour rappel : on considère souvent que l'acier a une limite d'endurance autour de 10^6 cycles de chargement).

Par la suite (1930), les chercheurs se sont concentrés sur la fatigue du béton à faible nombre de cycles de chargement (10^3 - 10^5 cycles), à cause des problèmes de fatigue des pistes d'aéroports.

Dans les années 1950 à 1960, les chercheurs se sont intéressés à la fatigue du béton armé sous chargements sismiques. La durée de vie des structures sous chargement sismique est en général comprise entre 10^0 et 10^3 cycles. Le terme « Fatigue à faible nombre de cycle » est lié à ce type de fatigue.

Au cours des années 70, on peut trouver de nombreux études sur la fatigue du béton à très grand nombre de cycle (10-50 millions de cycles pour les systèmes de transit rapide des masses, 50-500 millions de cycles pour les structures océaniques ou les structures en béton supportant des machines dynamiques). Le terme « Fatigue à très grand nombre de cycle » est lié à ce type de fatigue.

Après plus d'un siècle de recherche, nous pouvons maintenant citer de nombreux travaux expérimentaux (avec des chargements en compression ou en flexion) sur la fatigue du béton. Les observations générales de la courbe de fatigue (courbe de Wohler) sont :

- La forme de cette courbe est très proche d'une droite dans le repère logarithmique (S-LogN) ;
- Il n'y a pas de la limite d'endurance jusqu'à 10^7 cycles de chargement ;
- Pour une durée de vie de 10^7 cycles, le niveau de chargement est autour de 50% de la résistance en chargement statique;
- Les résultats expérimentaux sont très dispersés (deux ordres de grandeur) ;
- La loi probabiliste de Weibull est fiable pour traiter les résultats expérimentaux.

Nous pouvons trouver aussi beaucoup de travaux théoriques et numériques qui traitent de la fatigue du béton. Les deux domaines de la mécanique utilisés pour la fatigue du béton sont la mécanique de l'endommagement (pour l'initiation des fissures) et la mécanique de la rupture (pour la propagation des fissures).

Cependant, malgré tous ces travaux, la fatigue du béton reste toujours un phénomène mal maîtrisé par rapport à l'acier à cause de son hétérogénéité.

3.2. Matériau béton – Présentation générale

Le béton est un matériau largement utilisé depuis fort longtemps. Afin d'avoir une vue globale sur ce matériau, une présentation générale fera l'objet de cette partie.

3.2.1. Constituants du béton

Les constituants du béton sont : le ciment, les granulats, l'eau et les adjuvants. On a différents types de béton selon le pourcentage de chaque constituant dans le mélange et selon les différents types d'adjuvants.

- **Le ciment** : Le ciment est un liant hydraulique qui se présente sous la forme d'une poudre minérale fine s'hydratant en présence d'eau. Le ciment Portland est un mélange de clinker et de gypse finement broyés. Le clinker est obtenu dans les fours à ciment par cuisson à haute température de calcaire (CaCO_3 , environ 80%) et d'argile (SiO_2 , Al_2O_3 , Fe_2O_3 , MgO , K_2O , Na_2O , le tout à environ 20%), donnant lieu à des nodules durs. C'est en broyant très finement ceux-ci (diamètre des grains inférieur à 0.1 mm) additionnés d'un peu de gypse que l'on produit le ciment Portland largement utilisé.

- **Les granulats** : Les granulats (sables, gravillons et graviers) sont principalement obtenus par criblage et concassage de silex, de calcaire dur, de silico-calcaire, de granite, de quartzite... Ils occupent généralement 60 à 80 % du volume total et constituent le squelette du béton. Ils doivent être chimiquement inertes vis-à-vis du ciment, de l'eau et de l'air. La forme et la texture des granulats influencent les propriétés du béton (plus celles du béton frais que du béton durci). Les particules plates et allongées ou à surface rugueuse demandent plus d'eau pour une ouvrabilité donnée que les particules arrondies ou cubiques. De plus, l'adhérence entre le pâte de ciment et les granulats est influencée par la forme et la texture des particules : elle augmente avec leur rugosité et leur angularité.

- **L'eau de gâchage** : L'eau est un des ingrédients essentiels du béton. En effet, l'eau introduite dans le béton lors de sa fabrication va remplir deux fonctions essentielles : une fonction physique qui confère au béton frais les propriétés rhéologiques d'un liquide et une fonction chimique qui contribue au développement de la réaction d'hydratation et donc de la résistance mécanique.

L'eau de gâchage doit avoir les propriétés de l'eau potable. Il est exclu d'employer de l'eau de mer qui contient du chlorure de sodium car les sels dissous dans l'eau peuvent intervenir dans la rhéologie du

béton, la prise de la pâte de ciment et la durabilité du matériau durci (attaque des aciers d'armatures par les chlorures). C'est pourquoi la norme française NF P 18 303 limite en général à 2000 mg/l la quantité de sels dissous.

- **Les adjuvants** : Les adjuvants sont des produits chimiques incorporés au béton en faibles quantités afin d'en améliorer certaines propriétés. Les adjuvants les plus courants peuvent être organiques ou inorganiques et sont habituellement classés selon leur fonction :

- Les réducteurs d'eau qui ont pour fonction de diminuer le rapport E/C du béton tout en conservant la maniabilité désirée.
- Les retardateurs qui permettent de ralentir le durcissement de la pâte.
- Les accélérateurs qui permettent d'accélérer le durcissement de la pâte.
- Les super-plastifiants qui sont des polymères organiques solubles dans l'eau et dont la synthèse conduit à de longues chaînes de molécules de masses moléculaires élevées. Leur principale action est de s'enrouler autour des grains de ciment de sorte qu'ils se repoussent les uns les autres, entraînant une dispersion des grains.
- Les agents entraîneurs d'air qui confèrent au béton durci la capacité de résister aux effets des gels et dégels successifs en favorisant la formation de micro-bulles d'air réparties de façon homogène.

Selon la formulation du béton, nous pouvons avoir différents types du béton. En fonction de la résistance en compression à 28 jours, nous avons : béton ordinaire (20-50 MPa) ; béton à haute performance (50-80 MPa) ; béton à très haute performance (80-120 MPa). En fonction de la masse volumique, nous avons : béton léger (800-2000 kg/m³) ; béton normal (2000-2600 kg/m³) ; béton lourd (>2600 kg/m³).

3.2.2. Comportements mécaniques typiques du béton

Nous rappelons dans cette partie les comportements mécaniques typiques du béton durci. Pour avoir un ordre de grandeur des caractéristiques du béton, nous présentons ci-dessous les caractéristiques du béton de classe C30/37 (suivant les normes) :

E (MPa)	nu	Rho (kg/m ³)	Rc (MPa)	Rt (MPa)
33000	0.2	2500	38	3

Les valeurs données dans le tableau ci-dessus sont des valeurs moyennes pour le béton à 28 jours. Comme le béton est un matériau hétérogène, il présente un comportement mécanique très complexe qui dépend des paramètres comme l'âge, les types de chargement, la classe du béton, les conditions de coulage, etc.

a. Béton en compression statique

Les structures en béton travaillent souvent en compression (la résistance en compression est de 10 à 20 fois plus grande qu'en traction). C'est pourquoi la plupart des travaux dans la littérature traitent du béton en compression. Pour étudier le comportement du béton en compression, différents types d'essais avec différentes formes d'éprouvettes peuvent être utilisés (fig. 3.1a). Le comportement typique du béton en compression est présenté sur la figure 3.1b.

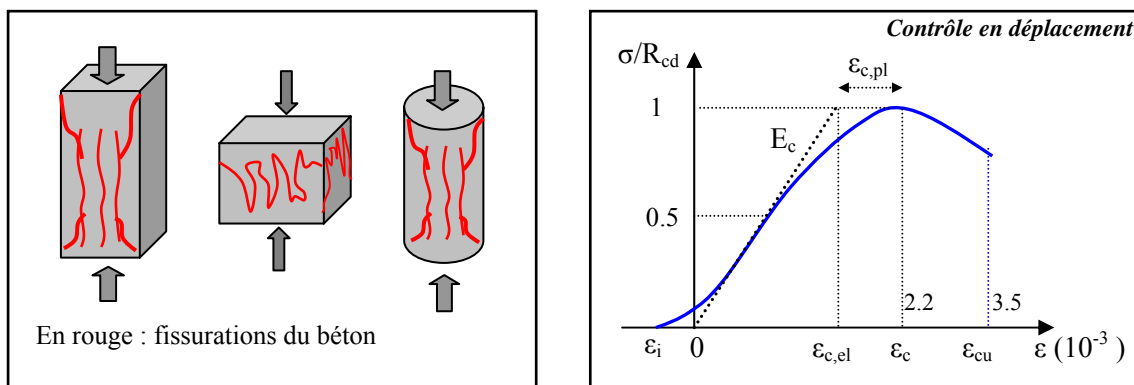


Figure 3.1 : a. Types d'essai en compression ; b. Courbe typique pour le béton en compression

b. Béton en traction statique

Afin d'étudier le comportement du béton en traction, différents types d'essai avec différentes formes d'éprouvettes peuvent être utilisés (fig. 3.2.a). Le comportement typique du béton en traction est présenté dans la figure 3.2.b.

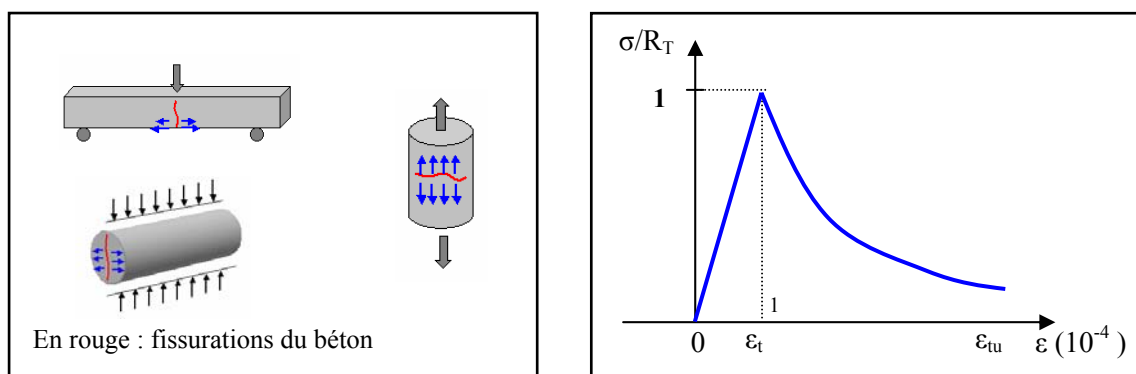


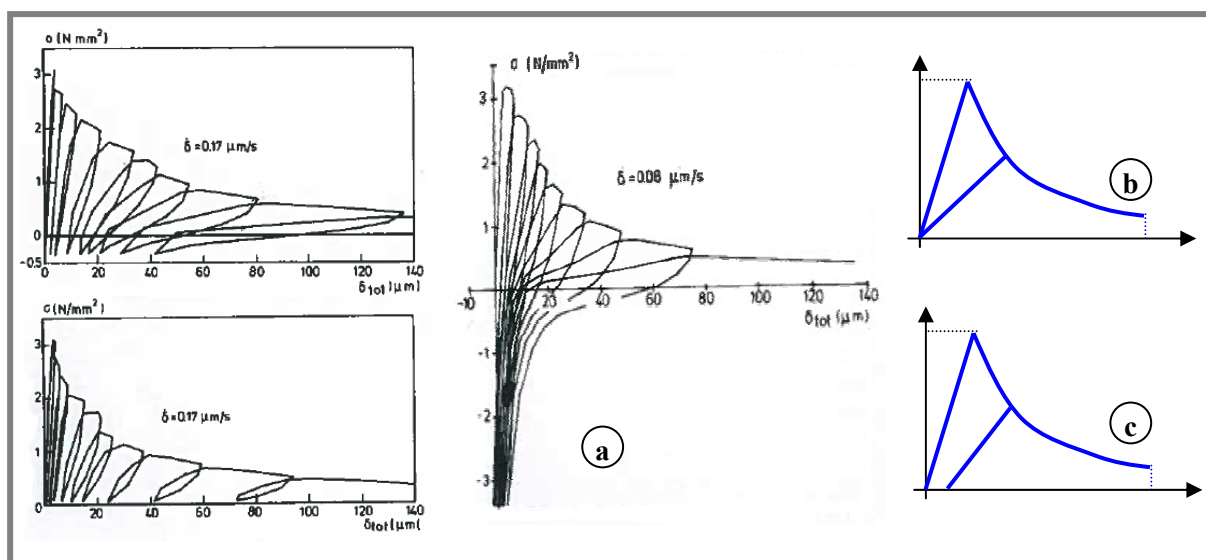
Figure 3.2 : a. Types d'essai en traction ; b. Courbe typique pour le béton en traction

Les caractéristiques du béton dépendent fortement de son âge, et cela surtout pour le béton jeune (moins de 28 jours). A partir de 1 an, les caractéristiques du béton évoluent très peu. A 28 jours, le béton atteint déjà 90% de sa résistance finale. C'est pourquoi on mesure souvent les caractéristiques du béton à 28 jours.

c. Béton en chargement cyclique

En faisant des essais en traction sur les éprouvettes rectangulaires (poutres) entaillées, Reinhardt (1984) a montré l'existence des boucles d'hystérésis sous sollicitations cycliques du béton (Fig. 3.3). Il a observé des déformations permanentes à la fin de chaque phase de décharge.

Afin de modéliser le comportement cyclique du béton, différents modèles ont été proposés dans la littérature. Les modèles les plus simples sont basés sur le comportement élastique endommageable. Nous pouvons aussi trouver des modèles élasto-plastiques endommageables et des modèles plus complexes pour modéliser les boucles d'hystérésis.



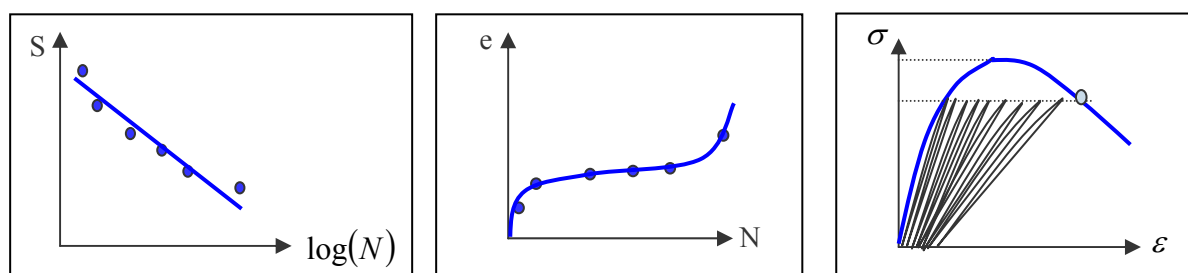
a. Essais de Reinhardt; b. Modèle élastique endommageable; c. Modèle élasto-plastique endommageable

Figure 3.3 : Comportement cyclique du béton

d. Béton en chargement de fatigue :

De nombreuses études sur le problème de la fatigue du béton ont été réalisées depuis plus d'un siècle. Les constatations générales des comportements en fatigue du béton sont représentées dans la figure 3.4.

- La forme de la courbe de fatigue (courbe de Wohler) est très proche d'une droite (fig.3.4.a). On n'a pas atteint la limite d'endurance pour le béton à dix millions de cycles.
- La courbe représentant la déformation maximale après chaque cycle se décompose en trois phases en fonction du nombre de cycles de chargement (fig 3.4.b). Pendant les premiers cycles, la déformation maximale augmente très vite. Puis, elle se stabilise pendant un grand nombre de cycle (80% de la durée de vie). Enfin, elle accélère encore une fois jusqu'à la rupture brutale.
- La déformation à la rupture en fatigue est très proche de la valeur limite en statique (Fig. 3.4.c).



a. Courbe de Wohler

b. Déformation - Nombre de cycle

c. Contrainte-déformation

Figure 3.4 : Comportements en fatigue du béton

Il faut aussi remarquer que les comportements du béton sont très aléatoires à cause de son hétérogénéité. La variation peut atteindre deux ordres de grandeur pour chaque point sur la courbe de Wohler, par exemple. Nous allons parler plus en détail de la fatigue du béton dans les parties suivantes.

3.3. Matériau béton – approches empiriques pour la fatigue

Afin d'étudier le comportement en fatigue du matériau béton, différentes approches ont été considérées dans la littérature. Nous présentons dans cette partie les approches empiriques utilisées pour étudier la fatigue du béton. Nous commençons par une revue des investigations expérimentales portant sur la fatigue du béton. Ensuite, différentes formules mathématiques permettant de modéliser la courbe expérimentale de fatigue du béton seront présentées et discutées en détail.

3.3.1. Fatigue du béton : investigations expérimentales

On réalise des essais pour étudier la fatigue du matériau béton depuis le début du 20^e siècle. La plupart de ces essais consistent en des chargements de compression ou de flexion sur des éprouvettes

cylindriques ou parallélépipédique. Au cours des vingt dernières années, d'autres types d'essais plus ou moins complexes (par exemple : traction directe 1D, traction - compression, compression 2D, compression 3D) ont été réalisés. Une liste non exhaustive d'auteurs ayant travaillé sur ce sujet est donnée dans le tableau suivant :

Type d'essai	Auteur (année)	
Compression 1D (selon Lee et Barr 2004)	<ul style="list-style-type: none"> - Graf (1936) - Williams (1943) - Antrim (1959) - Assimakopoulos (1959) - Gray (1961) - Gaede (1962) - Bennette (1967) - Award (1971) - Sparks (1973) 	<ul style="list-style-type: none"> - Weigler (1975) - Tepfers and Kutti (1979) - Holmen (1982) - Do M.T. et al. (1993) - Grzybowski et Meyer (1993) - Kim et Kim (1996) - Paskova and Meyer (1997) - Cachim (1999)
Flexion 1D	<ul style="list-style-type: none"> - Kesler (1953) - Murdock (1958) - McCall (1958) - Galloway (1973) - Galloway (1979) - Cornelissen (1984) - Byung (1991): 4P - Oh (1991) 	<ul style="list-style-type: none"> - Colin et Zemp (1991) - Shi et al. (1993) - Bazant et Schell (1993) - Li (1992) et Yang (1994) - Chang et Chai (1995) - Zhang et al. (1996) - Zhang et al. (1997) - Cachim (1999)
Traction directe 1D	- Saito and Imai (1983) - Cornelissen (1984)	
Traction 2D	- Subramaniam (2003)	
Compression 2D	- Su and Hsu (1988) - Nelson et al. (1988)	
Compression 3D	- Taliercio et Gobbi (1996)	

Tableau 3.1 : Liste des investigations expérimentales menées sur la fatigue du béton

Le béton étant un matériau hétérogène, les résultats expérimentaux sont très dispersés. En répétant plusieurs fois le même essai de fatigue sur des éprouvettes en béton identiques (béton d'une même coulée), on peut obtenir une variation du nombre de cycles à rupture dans un rapport de 1 à 100. Ce rapport peut avoir une valeur comprise entre 1 et 10 pour les métaux ou les matériaux bitumineux.

Afin de traiter ces résultats expérimentaux, différentes approches statistiques ont été considérées. La loi probabiliste la plus utilisée pour la fatigue du béton est la loi de Weibull à deux paramètres. Une autre loi peut être utilisée, la loi log - normale, faisant intervenir une moyenne et un écart-type caractéristiques de la dispersion.

La comparaison de ces résultats expérimentaux avec notre étude fera l'objet d'un autre chapitre.

3.3.2. Modélisations de la courbe de Wöhler pour le béton

Afin de disposer d'une équation mathématique de la courbe de fatigue à utiliser dans les codes de calcul et faire le dimensionnement des structures, plusieurs auteurs ont proposé différentes formules mathématiques. La plupart des auteurs ont modélisé cette courbe comme une droite, mais il existe aussi d'autres types de modélisations que nous allons présenter dans cette partie.

a. Modèles linéaires de type Aas-Jakobsen, 1970

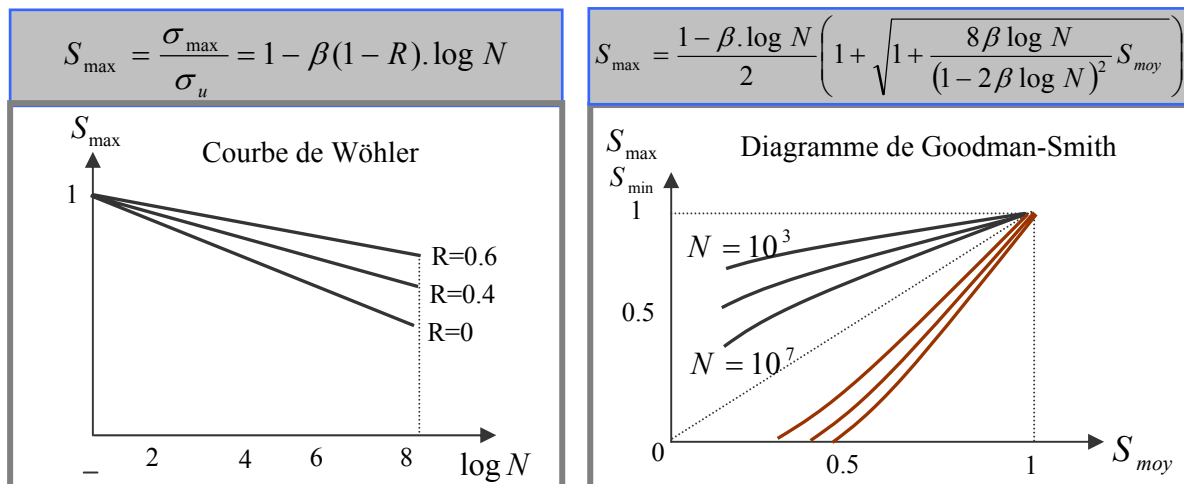
En 1970, Aas-Jakobsen a étudié l'effet de la contrainte minimum σ_{\min} sur la fatigue du béton. En utilisant la valeur adimensionnelle et modifiant le diagramme de Goodman, il a montré que la relation entre σ_{\max}/σ_u (σ_u est la résistance en statique de l'éprouvette) et σ_{\min}/σ_u est linéaire pour la fatigue du béton jusqu'à $N = 2$ millions de cycles. Il a proposé une relation σ -N-R pour la fatigue du béton non-armé ($R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$) :

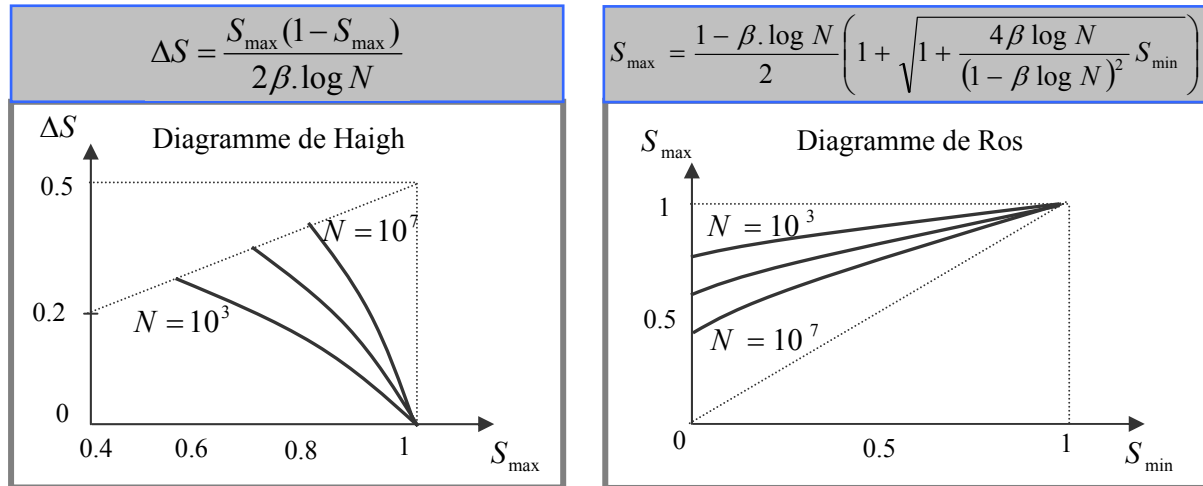
$$S = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_u} = 1 - \beta(1 - R) \cdot \log N \quad 0 \leq R \leq 1, \beta = 0.0640 \quad (3.1)$$

En 1979, Tepfers et ses collaborateurs ont vérifié la relation (3.1) avec leurs essais et les autres essais de la littérature. Ils ont proposé un autre coefficient β égal à 0.0684.

Remarque : Il y a deux limitations dans cette modélisation. La première est la non-prise en compte de la vitesse de chargement. La deuxième est l'indépendance du temps quand $R = 1$ (ou $\sigma_{\min} = \sigma_{\max}$).

A partir de cette modélisation, nous pouvons tracer différents types de courbe comme ci-dessous :





b. Modèle bi-linéaire de Thomas T.C. Hsu, 1981

Pour surmonter les limitations de (3.1), Thomas T.C. Hsu (1984) a introduit le paramètre T qui représente l'inverse de la fréquence du chargement dans la courbe σ - N - R pour avoir une nouvelle courbe de fatigue σ - N - T - R . L'influence de la vitesse (fréquence) de chargement est alors prise en compte.

A partir de la courbe σ - N - T - R , deux équations sont proposées pour prédire la fatigue du béton : l'une est pour la fatigue à faible nombre de cycles et l'autre est pour la fatigue à grand nombre de cycles. Ces équations sont construites à partir de résultats d'essais en compression et en flexion repris dans la littérature.

La première équation est pour la fatigue du béton non-armé en compression et en flexion à grand nombre de cycles (High Cycle Fatigue - HCF):

$$S = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_u} = 1 - 0.0662(1 - 0.556R) \cdot \log N - 0.0294 \cdot \log T \quad \text{avec } 0 \leq R \leq 1 \quad (3.2)$$

La deuxième équation est pour la fatigue du béton non-armé en compression et en flexion à faible nombre de cycles (Low Cycle Fatigue - LCF) :

$$S = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_u} = 1.2 - 0.2R - 0.133(1 - 0.779R) \cdot \log N - 0.053(1 - 0.445R) \cdot \log T \quad (3.3)$$

Ces équations sont comparées à des essais trouvés dans la littérature. Une bonne corrélation entre la plupart de ces essais et les deux équations ci-dessus a été constatée. Cependant, ces équations ne satisfont pas les résultats des essais sur les bétons légers à faible résistance en compression ($\sigma_u < 21$ MPa). La courbe S - N du modèle de Hsu se compose de deux droites (fig. 3.5).

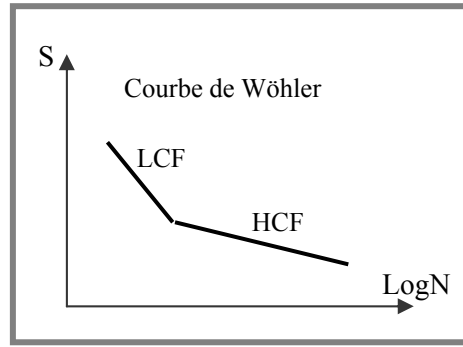


Figure 3.5 : Modèle de T.T.C. Hsu

c. Formules de Cornelissen H.A.W., 1984

En se basant sur les essais, Cornelissen a proposé les formules ci-dessous pour la fatigue du béton durci:

- Traction simple (béton sec (a)/ béton humide (b))

$$\log N = 14.81 - 14.52 \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_u^T} + 2.79 \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_u^T} \quad (3.4a)$$

$$\log N = 13.92 - 14.52 \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_u^T} + 2.79 \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_u^T} \quad (3.4b)$$

- Traction - compression

$$\log N = 9.36 - 7.93 \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_u^T} - 2.59 \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_u^C} \quad (3..5)$$

- Flexion simple

$$\log N = 12.53 - 10.95 \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_u^F} \quad (3.6)$$

- Flexion alternative

$$\log N = 9.91 - 7.45 \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_u^F} - 1.93 \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_u^C} \quad (3.7)$$

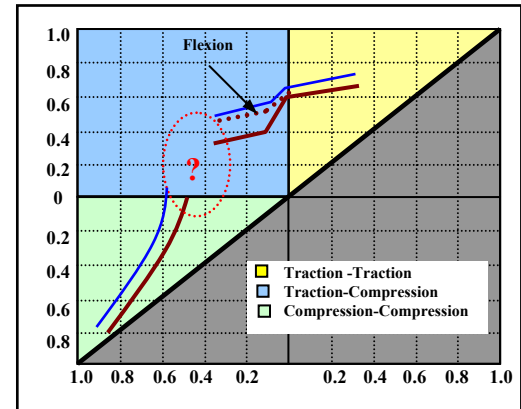


Figure 3.6 : Modèle de Cornelissen

Il a étudié l'influence de la contrainte minimum et/ou contrainte moyenne, sur le comportement en fatigue du béton. Il a présenté ses résultats sous forme des courbes de type Goodman (Fig. 3.6).

d. Modèle exponentiel de Shi et al., 1993

En se basant sur l'équation exponentielle de fatigue, utilisée par les chercheurs dans le domaine des routes en béton, Shi et al. ont proposé une nouvelle équation de fatigue du béton en flexion en introduisant la durée de vie équivalente N_{eq} ($N_{eq} = N^{1-R}$) :

$$S = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_u} = a.N_{eq}^{-b} = a.N^{-b(1-R)} \quad (3.8)$$

a, b sont les paramètres à déterminer à l'aide des essais

Ils ont réalisés 78 essais en flexion pour vérifier leur équation. La distribution de **Weibull** (deux paramètres) a été utilisée pour traiter les résultats d'essais (la méthode des moindres carrés et les techniques de

régression statistique ont été utilisées). Les paramètres a et b ont été déterminés selon la probabilité de survivante SF des éprouvettes ($a = 0.9611$ et $b = 0.0419$ si $SF = 0.95$; $a = 1.0380$, $b = 0.0422$ si $SF = 0.50$).

Condition d'essai : Granulats 20mm, $f = 1\text{Hz}$ pour $S > 0.85$, $f = 20\text{ Hz}$ pour $S < 0.85$, eau/ciment = 0.45, sable/ciment = 1.18, granulats/ciment = 2.74, éprouvette 500x100x100 mm.

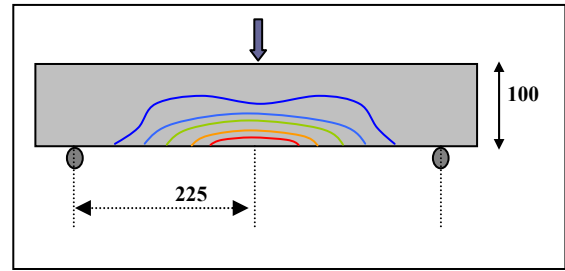


Figure 3.7 : Essais en flexion

e. Modèle de Zhang et al., 1996

Afin de prendre en compte l'influence de la vitesse de chargement (fréquence), Zhang a ajouté un multiplicateur C_f dans la formule linéaire de Aas-Jakobsen.

$$S = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_u} = C_f (1 - \beta(1 - R). \log N) \quad (3.9)$$

Le coefficient C_f dépend de la fréquence de chargement f.

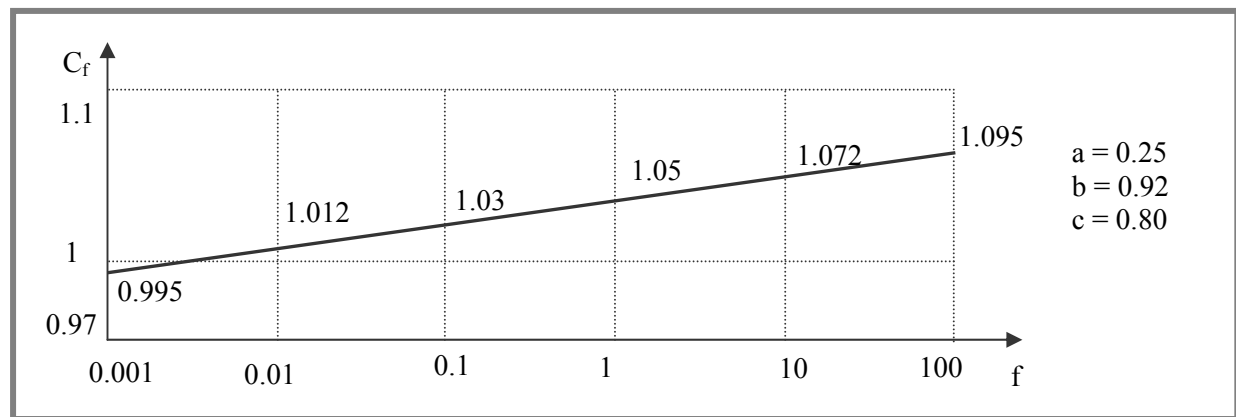


Figure 3.8 : Influence de la fréquence de chargement

Remarque : Plusieurs chercheurs ont constaté que la fatigue du béton est indépendante de la vitesse de chargement pour la fatigue à grand nombre de cycles, tandis que la fatigue à faible nombre de cycles dépend fortement de la vitesse de chargement.

3.4. Matériau béton – approches théoriques pour la fatigue

Il existe deux grandes familles de modèles théoriques pour étudier la fatigue du béton. La première famille se base sur les notions de la mécanique de l'endommagement et la deuxième famille utilise l'approche de la mécanique de la rupture.

3.4.1. Application de la mécanique de l'endommagement pour étudier la fatigue du béton

La première approche pour étudier la fatigue du béton est celle utilisant la mécanique de l'endommagement. Afin de mieux comprendre cette approche, nous rappelons d'abord quelques notions de base de la mécanique de l'endommagement pour un chargement statique. Nous verrons ensuite comment appliquer cette approche pour le chargement en fatigue.

a. Mécanique de l'endommagement

La mécanique de l'endommagement est une discipline de la mécanique se basant sur la théorie de la thermodynamique des processus irréversibles. Comme tous les problèmes de la thermodynamique, les ingrédients de la mécanique de l'endommagement sont :

- La définition des variables d'état (variables observables (ε , T) et variables internes (α))
- Le choix du potentiel thermodynamique, l'énergie libre (ψ_e), pour obtenir les lois d'état
- La détermination du potentiel de dissipation (ϕ) afin d'obtenir les lois complémentaires

Cette théorie a vu le jour dans les années 60. Le père de cette discipline est probablement Kachanov (1958). Nous trouvons maintenant plusieurs modèles d'endommagement associés avec les autres comportements non-linéaires.

La mécanique de l'endommagement modélise très bien le comportement du matériau béton. C'est la raison pour laquelle la plupart des travaux portant sur la mécanique de l'endommagement dans la littérature concernent le béton. Une liste non exhaustive des modèles d'endommagement du béton est donnée dans le tableau 3.2.

Remarque : isotrope (l'endommagement est modélisé par un scalaire), anisotrope (l'endommagement est modélisé par un tenseur d'ordre 2 ou 4), effet dissymétrique (l'endommagement évolue plus vite en traction qu'en compression), effet unilatéral (changement de rigidité E du à l'effet de refermeture des microfissures).

Auteur	Isotrope/ Anisotrope	Local/ Non-local	Couplage plasticité	Effet anélastique	Effet dissymétrique	Effet unilatéral
Ladevèze P., 1983	Anisotrope	Local	x	x	✓	✓
Mazars, 1984	Isotrope	Local	x	x	✓	x
Ju, 1989	Anisotrope	Local	x	✓	?	✓
Lubliner, 1989	Isotrope	Local	✓	✓	?	?
Ramtani, 1990	Anisotrope	Local	x	✓	✓	✓
La Borderie, 1991	Isotrope	Local	x	✓	x	✓
Dragon, 2000	Anisotrope	Local	✓	✓	✓	✓
Simo - Ju, 1987	Isotrop/ Anisotrope	Local	✓	✓	✓	x

Tableau 3.2 : Modèles d'endommagement du béton

b. Application de la mécanique de l'endommagement pour la fatigue

L'application de la mécanique de l'endommagement pour étudier la fatigue des matériaux a débuté dans les années 80. L'idée principale est de pouvoir suivre l'évolution de l'endommagement du matériau en fonction du nombre de cycle de chargement.

Modèle d'évolution d'endommagement de Paas

La forme générale de l'évolution d'endommagement est :

$$\dot{D} = H(\varepsilon_{eq} - \kappa) \cdot \frac{\partial \phi(Y, \varepsilon, D)}{\partial Y} \cdot \langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle \quad (3.10)$$

avec $H(\cdot)$: fonction Heaviside, Y : force thermodynamique associée à l'endommagement D , ε_{eq} : déformation équivalente, κ : seuil d'endommagement, $\langle X \rangle = X$ si $X \geq 0$ et $\langle X \rangle = 0$ si $X < 0$.

En chargement statique, on postule souvent que le seuil d'endommagement κ dépend de l'histoire de chargement et que le critère ne dépasse jamais le seuil (fig.3.9a). En chargement répétitif de fatigue, on suppose que ce seuil ne dépend pas de l'histoire de chargement et que l'endommagement évolue quand le critère dépasse le seuil (fig.3.9b).

Afin d'étudier l'évolution de l'endommagement par fatigue, Paas (1993) a proposé un potentiel thermodynamique :

$$\phi(Y, \varepsilon, D) = \alpha \cdot D^\beta \cdot \varepsilon_{eq}^\gamma \cdot Y \quad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma > 0 : \text{paramètres du matériau} \quad (3.11)$$

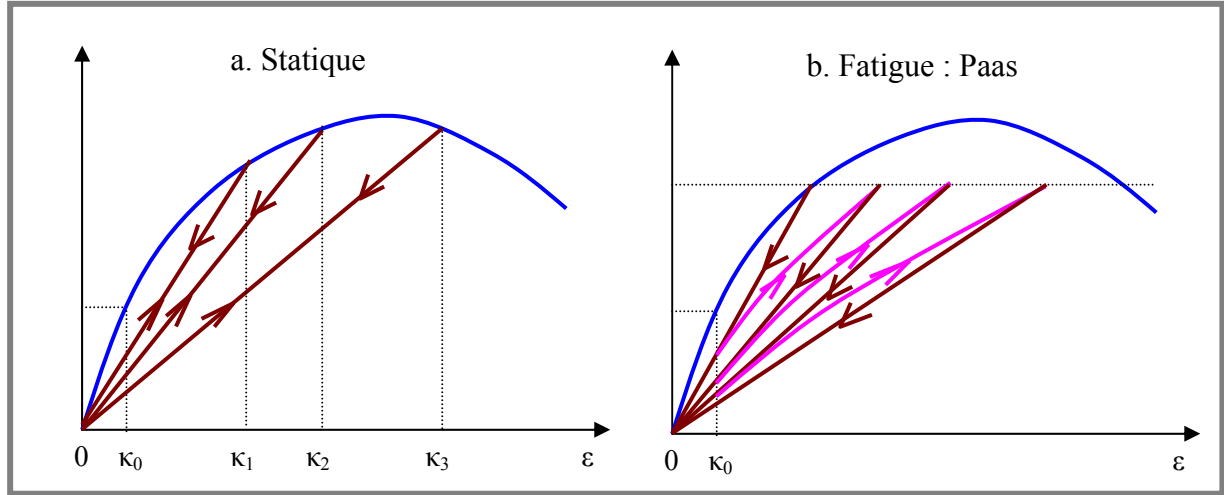


Figure 3.9 : Modèle d'endommagement par fatigue de Paas

La loi d'évolution de l'endommagement par fatigue devient :

$$\dot{D} = H(\varepsilon_{eq} - \kappa_0) \alpha \cdot D^\beta \varepsilon_{eq}^\gamma \langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 [\langle \varepsilon_i \rangle^2 + h \cdot \langle -\varepsilon_i \rangle^2]} \quad (3.12)$$

$h \in [0,1]$: paramètre représentant la différence d'endommagement entre la traction et la compression.

Peerling (1999) a proposé une autre loi d'évolution de l'endommagement :

$$\dot{D} = H(\varepsilon_{eq} - \kappa_0) \alpha \cdot e^{D \cdot \beta} \varepsilon_{eq}^\gamma \langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle \quad (3.13)$$

En utilisant ces lois pour le béton bitumineux, Bodin a retrouvé (par des calculs numériques) les deux premières phases du processus de fatigue (partie 3.2.2.d). Afin de pouvoir modéliser la troisième phase du processus de fatigue, il a proposé une autre loi d'évolution de l'endommagement par fatigue. En plus, pour le calcul structural, l'intégration non-locale de la déformation équivalente a été utilisée. La déformation équivalente a été remplacée par sa moyenne pondérée (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987).

La nouvelle loi d'évolution de l'endommagement par fatigue des bitumes, proposée par Bodin et al., est décrite par l'équation suivante :

$$\dot{D} = H(\bar{\varepsilon} - \kappa_0) \frac{\alpha_2}{\alpha_3 \cdot \alpha_1} \left(\frac{D}{\alpha_2} \right)^{1-\alpha_3} \cdot \exp\left(\frac{D}{\alpha_2} \right)^{\alpha_3} \bar{\varepsilon}^\gamma \langle \dot{\bar{\varepsilon}} \rangle \quad (3.14)$$

avec :

$$\bar{\varepsilon}(x) = \frac{\int_{\Omega} \Psi(x-s) \cdot \varepsilon_{eq}(s) \cdot ds}{\int_{\Omega} \Psi(x-s) \cdot ds}, \quad \Psi(x-s) = \exp\left(-\frac{4\|x-s\|}{l_c^2} \right), \quad \varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left[\left(\frac{\langle \sigma_i \rangle}{E_0(1-D)} \right)^2 \right]}$$

Dans cette loi, nous avons quatre paramètres (α_1 , α_2 , α_3 , γ) au lieu de trois paramètres comme dans la loi de Paas (α , β , γ). Le paramètre l_c est la longueur caractéristique du milieu, égal à trois fois la taille maximale du granulat du mélange.

Le paramètre γ peut être déterminé en utilisant la pente p de la courbe de Wöhler dans le diagramme log-log (Bodin 2002).

$$N_F = 10^6 \left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_6} \right)^p \text{ conduit à } \gamma = -(p+1)$$

où N_F est le nombre de cycle, ε_a l'amplitude de la sollicitation cyclique.

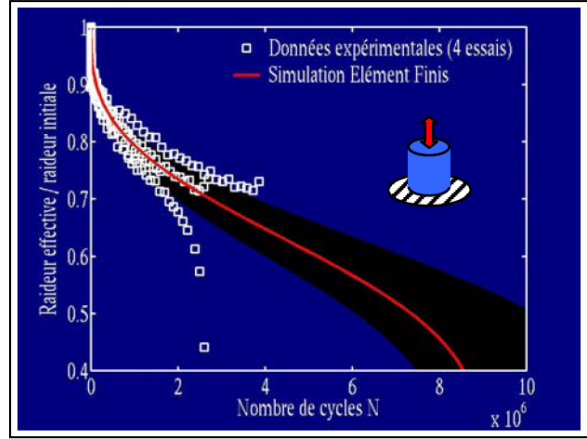


Figure 3.10 : Modèle de Bodin

Formulation de Marigo

Marigo, 1985, a proposé un critère irréversible de charge-décharge au lieu du seuil d'endommagement pour le chargement en fatigue. Avec ce critère, l'endommagement peut évoluer même si le chargement reste dans la zone élastique.

En chargement monotone :

$$\dot{D} = \begin{cases} \frac{1}{h} \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\varepsilon}} \right)^T \cdot d\underline{\varepsilon} \right\rangle_+ & \text{si } f(Y) = 1 \text{ et } \dot{f}(Y) = 0 \\ 0 & \text{si } f(Y) < 1 \text{ ou } f(Y) = 1 \text{ et } \dot{f}(Y) < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

où $h = \frac{\partial^2 \psi}{\partial d^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial Y} \cdot \frac{\partial f}{\partial Y}$ est le module d'écrouissage, $f(Y)$ est la fonction « gauge ».

En chargement de fatigue :

$$\dot{D} = \frac{1}{h} \cdot f^n \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\varepsilon}} \right)^T \cdot d\underline{\varepsilon} \right\rangle_+ \quad \text{avec } n > 0 \text{ est un paramètre du matériau} \quad (3.16)$$

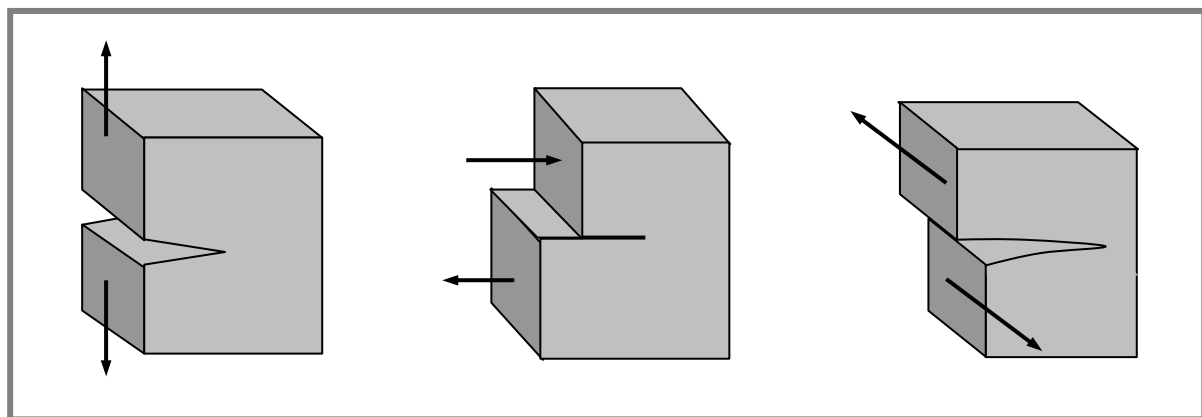
Quelques auteurs ont utilisé la formulation de Marigo, avec différents modèles d'endommagement, pour étudier la fatigue du béton : E. Papa (1993) (formulation de Marigo + modèle d'endommagement isotrope de Mazar) ; E. PaPa et A. Taliencio (1996) (formulation de Marigo + modèle d'endommagement anisotrope de La Borderie) ; A. Alliche (2004) (formulation de Marigo + modèle d'endommagement anisotrope de Dragon). Ils ont retrouvé les trois phases d'évolution de l'endommagement du processus de fatigue (partie 3.2.2.d).

3.4.2. Application de la mécanique de la rupture pour étudier la fatigue du béton

Dans cette partie, nous commençons par présenter quelques rappels des notions de base de la mécanique de la rupture. Nous voyons ensuite comment utiliser cette discipline pour étudier la fatigue du béton.

a. Mécanique linéaire de la rupture

La mécanique linéaire de la rupture traite le problème dans le domaine élastique linéaire. Selon la direction de la sollicitation par rapport à celle de la fissuration, on distingue trois modes de fissurations :



Mode I : Ouverture

Mode II : Cisaillement plan

Mode III : Cisaillement antiplan

Figure 3.11: Les modes de fissure

Le champ des contraintes est singulier au fond de la fissure. Il est calculé par la formule générale suivante :

$$\sigma = K(a, \sigma_{\infty}) \cdot g(r, \theta) \quad (3.17)$$

où a est la demi-longueur de la fissure, K est la facteur d'intensité de contrainte ($K = \sigma_{\infty} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot f$, f est une fonction qui dépend de la géométrie de la structure et du type de chargement).

Lorsque la valeur du facteur d'intensité de contrainte K dépasse un seuil K_C , la fissure commence à se propager. K_C est un paramètre du matériau, appelé « la ténacité ».

Un autre point de vue global permet d'analyser la propagation des fissures sous l'angle des échanges d'énergie qu'elle met en jeu. Les fondements de cette approche énergétique remontent à Griffith

(1920). L'idée sous-jacente est de faire un bilan des énergies mises en jeu avant et après propagation de la fissure, en tenant compte de l'énergie de surface créée par l'avancée de la fissure.

Si une fissure se propage, il y a une dissipation de l'énergie potentielle. Le taux de restitution d'énergie de fissuration G présente une quantité d'énergie disponible qui peut être utilisée pour créer le mécanisme de décohésion entre les deux lèvres de fissure. On introduit aussi G_C la valeur seuil d'énergie, à partir de laquelle la fissure commence à se propager.

Dans le cadre des hypothèses de l'élasticité linéaire isotrope et homogène, le taux de restitution de l'énergie et les facteurs d'intensité des contraintes en pointe de fissure sont reliés par la formule d'Irwin (1957) :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \quad (3.18)$$

Il existe d'autres méthodes pour caractériser la singularité du champ de contraintes au voisinage de la pointe des fissures. Ce sont les intégrales de contour : l'intégral J de Rice et l'intégral I de Bui.

b. Mécanique non-linéaire de la rupture

La mécanique linéaire de la rupture est souvent utilisée pour les matériaux quasi élastiques fragiles. La mécanique non-linéaire de la rupture est applicable pour le comportement non-linéaire avec une zone confinée non-linéaire (plasticité, micro-fissures) en pointe de la fissure. Pour les matériaux ductiles (métaux), la zone confinée est une zone de déformation plastique, tandis que les micro-fissures sont présentes dans cette zone pour les matériaux quasi-fragiles (béton) (Bazant 2002, figure 3.12).

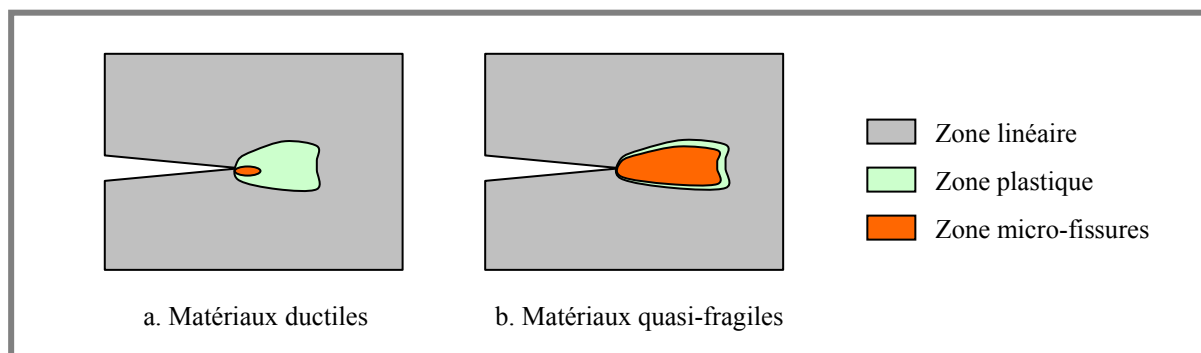


Figure 3.12 : Zones confinées non - linéaires au fond de la fissure

Selon Irwin, pour le mode I, la longueur de la zone confinée l_p intervient dans l'expression du facteur d'intensité :

$$K = \sigma_{\infty} \sqrt{\pi(a + l_p)} \cdot f \quad (3.19)$$

Afin de modéliser la zone confinée, Dugdale-Barenblatt introduit la notion de « forces de cohésion » $f(w) = \sigma(w)$, une fonction décroissante avec l'ouverture de la fissure. L'énergie de dissipation devient la somme de l'énergie de Griffith – Irwin G_{GI} et une partie créée par les forces de cohésion G_f :

$$G = G_{GI} + G_f = G_{GI} + \int_0^{w_i} \sigma(w) \cdot dw \quad (3.20)$$

Différentes formes de la courbe $\sigma(w)$ ont été proposées : Linéaire (Hillerborg, 1976) ; Bi-linéaire (Roelfstra-Wittmann, 1986 et Figueiras-Owen, 1984) ; Tri-linéaire (Liaw, 1990) ; Exponentielle (Footer, 1986 ; Reinhardt, 1985 ; Gopcalaratnam-Shah, 1985 ; Cedolin 1987) ; Puissante (Du 1990, Hordijk 1991).

c. Application de la mécanique de la rupture pour étudier la fatigue du béton

La fatigue du matériau se compose de trois phases : initiation, propagation et rupture brutale. La mécanique de la rupture est utilisée depuis longtemps pour étudier la phase de propagation des fissures par fatigue. La loi empirique de Paris - Erdogan (1963) est une des lois la plus utilisée pour suivre l'évolution de la fissure en fonction du nombre de cycles et du facteur d'intensité des contraintes :

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K) = C \cdot \Delta K^m \quad (3.21)$$

Où C , m sont des paramètres du matériau ($m = 2-4$ pour les métaux, $m=10-50$ pour les matériaux quasi-fragiles).

Matériau	C	m	K_{IC} (MPa.m ^{0.5})	E (MPa)
Aluminium 2024-T3	$1.86 \cdot 10^{-11}$	4.05	3.6	72500
Aluminium 2019-T851	$1.04 \cdot 10^{-10}$	3.18	3.3	70000
Aluminium 7075-T6	$1.10 \cdot 10^{-10}$	3.45	2.3	70900
Acier EN24	$4.45 \cdot 10^{-11}$	2.45	4.5	200000
Acier 1045, normalisé, BHN = 153	$8.2 \cdot 10^{-13}$	3.5	7.1	204000
Acier A588	$4.02 \cdot 10^{-12}$	3.6	5.2	191000
Béton		10.6	--	--

Tableau 3.3 : Paramètres de la loi de Paris

Il faut noter que la loi de Paris est applicable sous l'hypothèse des fissures de taille moyenne (K reste dans la zone II, figure 3.13). Quand K est faible (Zone I), la vitesse de propagation diminue et il existe

un seuil inférieur ΔK_{th} pour que la macro - fissure ne se développe pas si $\Delta K < \Delta K_{th}$. Quand K tend vers K_C (ténacité), nous avons une rupture brutale de la structure (Griffith - Irwin).

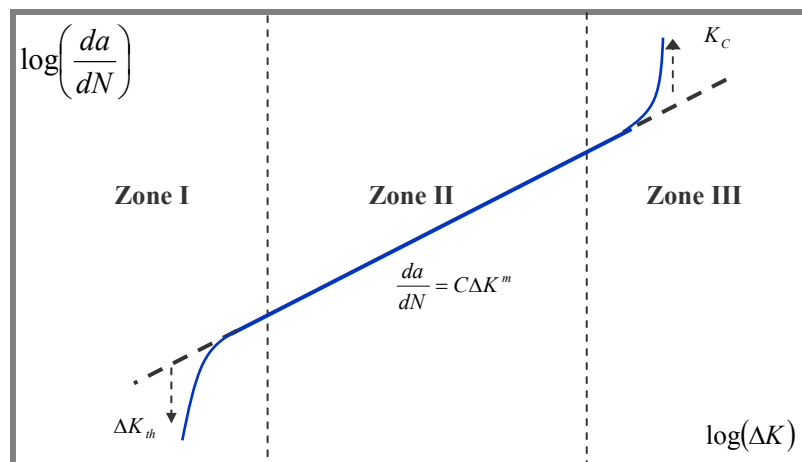


Figure 3.13 : Propagation des fissures

Afin de pouvoir modéliser différents phénomènes (effet de taille, fissure de petite taille, ratio du chargement, refermeture des fissures...), différentes versions modifiées de la loi de Paris ont été proposées. Nous pouvons citer ici : Broek-Schijve (1963), Frost-Dugdale (1968), Forman et al. (1967), Erdogan-Ratwani (1970), Richards-Lindley (1972), Nicholson (1973), Sullivan-Crocker (1976), Sperr (1977), Fitzgerald (1977).

D'autres auteurs (Barenblatt et Botvina 1980, Carpinteri – Paggi - Ciavarella 2009) ont montré que les paramètres de la loi de Paris (C , m) ne sont pas des constantes du matériau mais dépendent des conditions de chargement et de la structure.

Pour le béton, la mécanique linéaire de la rupture n'est pas applicable. Beaucoup d'auteurs ont essayé de combiner la loi de Paris avec la mécanique non-linéaire de la rupture pour étudier la fatigue du béton : Subramaniam (1997-2000), Carpinteri – Spagnoli (2004), Sain – Kishen (2007), Gaedicke (2009).

Bazant et Xu ont proposé un modèle, « size effect model », pour la fatigue du béton. Dans ce modèle, la loi de Paris est modifiée pour prendre en compte l'effet de taille de l'éprouvette. Gylltoft (1983), Reinhardt et al. (1986), Hordijk (1991) ont utilisé le modèle "fictitious crack model" et une loi d'évolution du comportement cyclique pour étudier la fatigue du béton par la méthode des éléments finis.

Afin de prendre en compte la micro-structure du matériau béton pour modéliser la propagation des fissures, le modèle de type réseau des poutres (lattice model) a été utilisé par plusieurs auteurs pour le

chargement statique (Herrmann, 1989 ; Meakin, 1989 ; Jagota, 1994 ; van Mier ; Schlangen, 1992-1997 ; Vervuurt, 1997 ; Van Vliet, 2000, Lilliu, 2007). Cependant, pour le chargement de fatigue, nous n'avons trouvé qu'une seule étude où Guo et al. (2008-2010) ont utilisé le modèle du réseau de poutres.

Ce type de modèle est aussi très pertinent pour étudier l'effet d'échelle des matériaux quasi-fragiles de type béton (Hermann et al., 1989 ; Bazant et al., 1990 ; Sab et Laalai, 1993 ; Schlangen et Garboczi, 1996 ; Ince et al., 2003 ; Cusatis et al., 2003 ; Miled, 2005).

L'idée principale du modèle de type réseau est de substituer à l'étude d'un corps continu chargé celle d'un autre corps généralement discret, en approchant l'énergie potentielle totale de ces deux corps. Ce modèle est choisi dans ce travail pour étudier la propagation des fissures dans le béton.

3.5. Conclusions

Le problème de la fatigue du béton intéresse les chercheurs depuis le début du 20^e siècle avec le développement du béton armé pour les ponts ferroviaires. Après plus d'un siècle de recherche sur ce sujet, nous pouvons trouver un grand nombre de résultats expérimentaux et théoriques dans la littérature.

Concernant les travaux expérimentaux, nous trouvons en général des essais de fatigue du béton sous chargements en compression ou en flexion. Les observations générales de la courbe de fatigue (courbe de Wohler) sont :

- La forme de cette courbe est très proche d'une droite dans le repère logarithmique (S-LogN) ;
- Il n'y a pas de la limite d'endurance jusqu'à 10^7 cycles de chargement ;
- Pour une durée de vie de 10^7 cycles, le niveau de chargement est autour de 50% ;
- Les résultats expérimentaux sont très dispersés (deux ordres de grandeur) ;
- La loi probabiliste de Weibull est fiable pour traiter les résultats expérimentaux.

Nous pouvons trouver aussi beaucoup d'investissements théoriques et numériques qui traitent de la fatigue du béton. Les deux disciplines utilisées pour la fatigue du béton sont la mécanique de l'endommagement (pour l'initiation des fissures) et la mécanique de la rupture (pour la propagation des fissures).

Malgré tous ces efforts, la fatigue du béton reste toujours un phénomène mal maîtrisé par rapport à l'acier en raison de son hétérogénéité.

Dans la suite, nous allons utiliser la mécanique de l'endommagement pour prédire l'amorçage des fissures par fatigue du béton. La formulation de Marigo, combinée avec une loi d'évolution d'endommagement (par exemple, la loi de Mazas), sera empruntée pour tracer la courbe de fatigue (courbe de Wöhler). Ces résultats serviront pour le dimensionnement des dalles en béton des voies ferrées urbaines.

Le modèle de type réseau de poutres (Lattice) sera implanté dans un code de calcul par éléments finis pour étudier la propagation des fissures dans le béton.

Enfin, les résultats numériques seront comparés avec les résultats d'essais que nous avons réalisés dans un but de validation des modèles utilisés.

Chapitre 4

Endommagement par fatigue du matériau béton

Sommaire du chapitre 4

4.1. Introduction	98
4.2. Modèles théoriques.....	99
4.2.1. Théorie de l'endommagement.....	99
4.2.2. Formalisme de Marigo : endommagement par fatigue.....	102
4.2.3. Modèle d'endommagement de Mazars	103
4.2.4. Endommagement par fatigue.....	104
4.3. Résultats numériques	105
4.3.1. Fatigue sous chargements de compression.....	105
4.3.2. Fatigue sous chargement de traction	109
4.3.3. Fatigue sous chargement biaxial de traction - traction.....	111
4.4. Etude expérimentale de la fatigue du béton.....	114
4.4.1. Description de la procédure expérimentale	114
4.4.2. Présentation des résultats expérimentaux.....	118
4.5. Application – Dimensionnement des dalles ferroviaires en béton.....	122
4.5.1. Problématique.....	122
4.5.2. Modélisation 3D de la voie ferrée	123
4.5.3. Post-traitement en fatigue - Dimensionnement de la dalle.....	125
4.6. Conclusions	126

4.1. Introduction

La mécanique de l'endommagement est l'une des approches que nous pouvons utiliser pour étudier la fatigue du béton. La différence entre l'évolution de l'endommagement sous chargement cyclique et celle sous chargement statique provient du fait que pour le cas du chargement cyclique, l'endommagement peut évoluer même si le chargement est faible (domaine élastique pour le cas statique).

Afin de disposer d'une méthode pour calculer l'évolution de l'endommagement sous chargement cyclique, Marigo a proposé un formalisme permettant de remplacer la notion de la surface seuil par une notion de charge – décharge irréversible. Cette méthode sera développée dans ce chapitre en combinaison avec le modèle d'endommagement de Mazars dans le but d'étudier la fatigue du béton.

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord rappeler les bases théoriques de la théorie de l'endommagement et les modèles de Marigo et de Mazars.

Nous présentons ensuite les résultats numériques (mises en œuvre sous MATLAB) pour les cas de chargement de compression, de traction et de traction – traction. Les courbes numériques seront discutées plus en détail en les comparant avec les résultats expérimentaux.

La partie suivante concerne la description de notre campagne d'essais en fatigue du béton. Ces essais doivent nous permettre de vérifier les calculs numériques et d'identifier les paramètres du modèle théorique.

Enfin, la dernière section du chapitre fait l'objet d'une application sur le dimensionnement de la dalle de voie en béton du système ferroviaire.

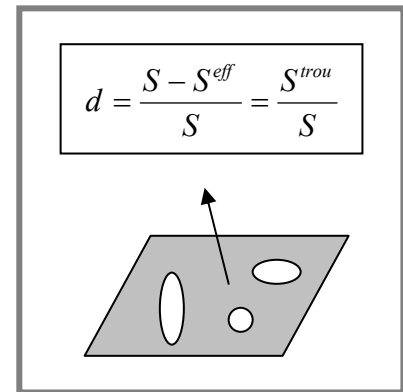
4.2. Modèles théoriques

Dans notre étude, nous considérons que l'endommagement est identique dans toutes les directions (isotrope). La variable d'endommagement est donc un scalaire.

4.2.1. Théorie de l'endommagement

Le but de la théorie de l'endommagement est de disposer d'un outil capable de modéliser via les variations des caractéristiques élastiques, la dégradation progressive du matériau en fonction du chargement et donc le phénomène d'adoucissement des contraintes. C'est un phénomène à part entière qui repose sur l'observation d'un état endommagé (ici micro-fissuré) et qui nécessite donc l'introduction d'une nouvelle variable interne au sens de la thermodynamique notée d . La théorie de l'endommagement suppose qu'il existe un état dans lequel le matériau est sain (ou proche de l'être) où l'endommagement est nul (ou quasiment nul).

Dire que le matériau est endommagé équivaut à dire que la microstructure du matériau n'est plus continue, et qu'il y existe des micro-fissures ou des micro-cavités. Ainsi, la surface S sur laquelle s'applique la force F peut être considérée comme la somme d'une surface effective S_{eff} (la matière) et d'une surface endommagée S_{trou} (les vides et les fissures).



Du point de vue du comportement de la matière, la force ne s'applique effectivement qu'à la surface effective S_{eff} . Le terme S_{trou}/S représente donc la variable d'endommagement d .

Comme dans tous les problèmes de la thermodynamique des processus irréversibles, les ingrédients de la mécanique de l'endommagement sont :

- La définition des variables d'état (variables observables (ϵ , T) et variables internes (d))
- Le choix du potentiel thermodynamique, l'énergie libre (ψ), pour obtenir les lois d'état
- La détermination du potentiel de dissipation (ϕ) afin d'obtenir les lois complémentaires

L'énergie libre du matériau endommagé est donnée par :

$$\psi = \frac{1}{2}(1-d)\underline{\underline{\epsilon}}^T : [C] : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (4.1)$$

où :

d est la variable d'endommagement (scalaire)

$[C]$ est la matrice de rigidité élastique

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ est le tenseur de déformation

Nous obtenons alors les lois d'état pour la contrainte et la force thermodynamique:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = (1 - d)[C] \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (4.2)$$

$$Y = -\frac{\partial \psi}{\partial d} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^T \cdot [C] \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (4.3)$$

L'évolution de l'endommagement est donnée par la formule générale :

$$\dot{d} = g(\underline{\underline{\varepsilon}}, d, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}) \quad (4.4)$$

La fonction g est positive, homogène de degré 1, c'est-à-dire,

$$g(\underline{\underline{\varepsilon}}, d, \lambda \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}) = \lambda g(\underline{\underline{\varepsilon}}, d, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}), \lambda > 0 \quad (4.5)$$

L'inégalité de Clausius-Duhem doit être toujours satisfaite:

$$D_I = Y \cdot \dot{d} \geq 0 \quad (4.6)$$

Dans l'espace des forces d'endommagement, on définit un domaine convexe ζ qui contient l'origine 0. Ce domaine convexe est caractérisé par sa fonction de charge :

$$f(Y) = \inf \left\{ \eta > 0, \frac{Y}{\eta} \in \zeta \right\} \quad (4.7)$$

La fonction f est positive, homogène de degré 1. La propriété de la fonction de charge est:

$$Y \in \zeta \Leftrightarrow f(Y) \leq 1 \quad (4.8)$$

On postule que la fonction de charge est différentiable. De plus, on assume une hypothèse de dissipation normale. L'évolution de l'endommagement devient :

$$\dot{d} = \begin{cases} \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial Y}, \dot{\lambda} \in R & \text{si } f(Y) > 0 \\ 0 & \text{si } f(Y) = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

L'inégalité de Clausius-Duhem prend la forme suivante :

$$D_I = \begin{cases} \dot{\lambda} \cdot Y \cdot \frac{\partial f}{\partial Y} & \text{si } f(Y) > 0 \\ 0 & \text{si } f(Y) = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

La convexité de la fonction de charge et le fait que ζ contient l'origine 0 imposent la condition suivante :

$$Y \frac{\partial f}{\partial Y} \geq f(Y) \quad (4.11)$$

La condition (4.10) est vérifiée si $\dot{\lambda} \geq 0$.

Pour un chargement monotone, on utilise le concept de la surface seuil (équivalent au problème élasto-plastique). Il existe un domaine réversible (élastique) dans lequel l'endommagement n'évolue pas. L'endommagement ne peut évoluer que sur la frontière de ce domaine. L'expression de l'amplitude de l'endommagement $\dot{\lambda}$ s'écrit de façon suivante :

$$\dot{\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } f(Y) < 1 \\ \frac{1}{h} \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right)^T \cdot \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \right\rangle_+ & \text{si } f(Y) = 1 \end{cases} \quad (4.12)$$

où :

$$h = \frac{\partial^2 \psi}{\partial d^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial Y} \cdot \frac{\partial f}{\partial Y} \quad \text{est le module d'écrouissage}$$

Au final, l'évolution de l'endommagement sous chargement monotone est donnée par l'expression suivante :

$$\dot{d} = \begin{cases} \frac{1}{h} \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right)^T \cdot \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \right\rangle_+ & \text{si } f(Y) = 1 \text{ et } \dot{f}(Y) = 0 \\ 0 & \text{si } f(Y) < 1 \text{ ou } f(Y) = 1 \text{ et } \dot{f}(Y) < 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

4.2.2. Formalisme de Marigo : endommagement par fatigue

Marigo a proposé en 1985 un critère irréversible de charge - décharge pour s'affranchir de la notion de seuil d'endommagement pour le cas du chargement en fatigue. Avec ce critère, l'endommagement peut évoluer même si le chargement reste dans la zone élastique.

Supposons que l'état actuel est déterminé par $(\underline{\underline{\varepsilon}}, d)$. Si le chargement varie ($\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$) et si $\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ est positif,

l'endommagement évolue. Plus précisément, l'amplitude de l'endommagement pour le chargement cyclique est calculée par la formule suivante :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{h} \cdot f^n \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right)^T \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \right\rangle_+ \quad (4.14)$$

où n est un paramètre du matériau, $n > 0$.

L'expression (4.14) montre que l'endommagement évolue même si l'état actuel n'est pas sur la frontière du domaine réversible ($f = 1$). Pour le chargement cyclique, la fonction de charge sert à définir « une surface limite des états admissibles ». En d'autres termes, nous avons trois possibilités qui découlent de l'équation 4.14 :

- si $\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right)^T \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} > 0$, le matériau est en phase de charge et $\dot{d} \neq 0$
- si $\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right)^T \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} < 0$, le matériau est en phase de décharge et $\dot{d} = 0$
- si $\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right)^T \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = 0$, le matériau est en phase neutre et $\dot{d} = 0$

Il est aussi intéressant de noter que la loi de fatigue (formule 4.14) est une « régularisation » de la loi statique (formule 4.12). En effet, si n tend vers infini, l'expression (4.14) devient :

$$\dot{\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } f(Y) < 1 \\ \frac{1}{h} \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right)^T \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \right\rangle_+ & \text{si } f(Y) = 1 \end{cases} \quad (4.15)$$

Cette dernière est identique à l'expression (4.12).

4.2.3. Modèle d'endommagement de Mazars

Mazars formule en 1984 un premier modèle élastique endommageable isotrope pour le béton qui fait depuis référence et dont de nombreux auteurs se sont inspirés.

Le point particulier de ce modèle est d'utiliser un critère en déformation en introduisant la notion de déformation équivalente. Le modèle prend en compte la dissymétrie du comportement du béton. Cependant, ce modèle ne tient pas compte des autres phénomènes liés au comportement du béton comme l'irréversibilité de la déformation, l'anisotropie et l'effet unilatéral.

On peut résumer ce modèle comme suit :

Le potentiel de dissipation en fonction de déformation est adopté dans le modèle:

$$\phi^* = \phi^*(\underline{\varepsilon}, d) \quad (4.16)$$

Par conséquent, la surface seuil d'endommagement s'écrit :

$$f(\underline{\varepsilon}, K) = \varepsilon_{eq} - K(d) = 0 \quad (4.17)$$

La déformation équivalente s'écrivant de la façon suivante:

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad (4.18)$$

Avec ε_i la déformation principale dans la direction i , et $\langle \bullet \rangle_+ = (\bullet + |\bullet|)/2$.

La variable d'endommagement (d) résulte d'une combinaison d'un endommagement de traction d_t et d'un endommagement de compression d_c :

$$d = \alpha_t d_t + (1 - \alpha_t) d_c \quad (4.19)$$

Le coefficient α_t qui réalise le couplage entre traction et endommagement est tel qu'en l'absence totale de traction, $\alpha_t = 0$ et en l'absence totale de compression $\alpha_t = 1$. Il est défini par la relation suivante :

$$\alpha_t = \frac{\sum \langle \varepsilon_i \rangle_+ \varepsilon_{ti}}{\varepsilon_{eq}^2} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_t = \frac{1+\nu}{E} \langle \sigma \rangle_+ - \frac{\nu}{E} tr(\langle \sigma \rangle_+) \quad (4.20)$$

Les endommagements de traction et de compression sont définis par les équations suivantes dès lors que $\varepsilon_{eq} > a_1$:

$$\dot{d} = \left(\frac{a_1(1-a_2)}{\varepsilon_{eq}^2} + \frac{a_2 a_3}{e^{a_3(\varepsilon_{eq}-a_1)}} \right) \langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_+ \quad (4.21)$$

où a_1, a_2, a_3 sont des paramètres matériaux à identifier.

4.2.4. Endommagement par fatigue

L'objectif de cette section est de trouver la fonction de charge pour le modèle de Mazars dans le cas du chargement cyclique. Nous reprenons la même idée que celle de E. Papa (1993).

Hypothèses :

- Considérons ε_{eq} au lieu de Y pour définir une fonction fictive $f^*(\varepsilon_{eq}, d)$
- Supposons que $f^*(\varepsilon_{eq}, d) = p(\varepsilon_{eq}) + q(d)$

La condition de consistance s'écrit :

$$\dot{f}^*(\varepsilon_{eq}, d) = 0 \Rightarrow \dot{d} = -\frac{1}{\partial q / \partial d} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varepsilon_{eq}} \cdot \dot{\varepsilon}_{eq} \quad (4.22)$$

En identifiant l'équation (4.21) et l'équation (4.22), nous trouvons l'expression suivante :

$$f^*(\varepsilon_{eq}, d) = -\frac{a_1(1-a_2)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{a_2}{\exp[a_3(\varepsilon_{eq} - a_1)]} - d + 1 \quad (4.23)$$

La fonction jauge qui varie entre 0 et 1 est définie comme suit :

$$f(\varepsilon_{eq}, d) = \frac{1-d}{\frac{a_1(1-a_2)}{\varepsilon_{eq}} + \frac{a_2}{\exp[a_3(\varepsilon_{eq} - a_1)]}} \quad (4.24)$$

L'évolution de l'endommagement sous chargement monotone devient :

$$\dot{d} = \begin{cases} f(\varepsilon_{eq}, d) \cdot \left(\frac{a_1(1-a_2)}{\varepsilon_{eq}^2} + \frac{a_2 a_3}{e^{a_3(\varepsilon_{eq}-a_1)}} \right) \langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_+ & \text{si } f = 1 \text{ et } \dot{f} = 0 \\ 0 & \text{si } f < 1 \text{ ou } f = 1 \text{ et } \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

En utilisant le formalisme de Marigo, nous trouvons l'expression suivante pour l'évolution de l'endommagement sous chargement cyclique :

$$\dot{d} = \left(\frac{1-d}{\frac{a_1(1-a_2)}{\varepsilon_{eq}} + \frac{a_2}{\exp[a_3(\varepsilon_{eq} - a_1)]}} \right)^n \cdot \left(\frac{a_1(1-a_2)}{\varepsilon_{eq}^2} + \frac{a_2 a_3}{e^{a_3(\varepsilon_{eq}-a_1)}} \right) \langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_+ \quad (4.26)$$

4.3. Résultats numériques

Nous utilisons maintenant le formalisme de Marigo couplé au modèle d'endommagement de Mazars (équation 4.26) pour étudier la fatigue du béton sous chargement de compression, de traction et de traction - traction.

4.3.1. Fatigue sous chargements de compression

Pour le cas de la compression, nous avons :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1 \cdot \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1, \text{ avec } \sigma_1 < 0 \quad (4.27)$$

En utilisant la théorie de l'élasticité, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & * & * & & & \\ -\nu & * & * & & & \\ & & & * & & \\ & & & & * & \\ & & & & & * \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

où $E = (1-d)E_0$, E est le module d'élasticité de l'état endommagé du matériau

Le champ de déformation pour le cas de chargement de compression s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_1 \cdot \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \varepsilon_2 \cdot (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \quad (4.29)$$

où :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \sigma_1 < 0, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \cdot \varepsilon_1 > 0 \quad (4.30)$$

La partie positive des déformations s'écrit :

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}]^+ = \varepsilon_2 \cdot (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \quad (4.31)$$

La déformation équivalente est donc :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} = \varepsilon_2 \sqrt{2} = -\nu \cdot \varepsilon_1 \cdot \sqrt{2} \quad (4.32)$$

La fonction jauge du modèle de Mazars prend la forme suivante :

$$f(\varepsilon_{eq}, d) = \frac{1-d}{\frac{a_1(1-a_2)}{-\nu \varepsilon_1 \sqrt{2}} + \frac{a_2}{\exp[a_3(-\nu \varepsilon_1 \sqrt{2} - a_1)]}} \quad (4.33)$$

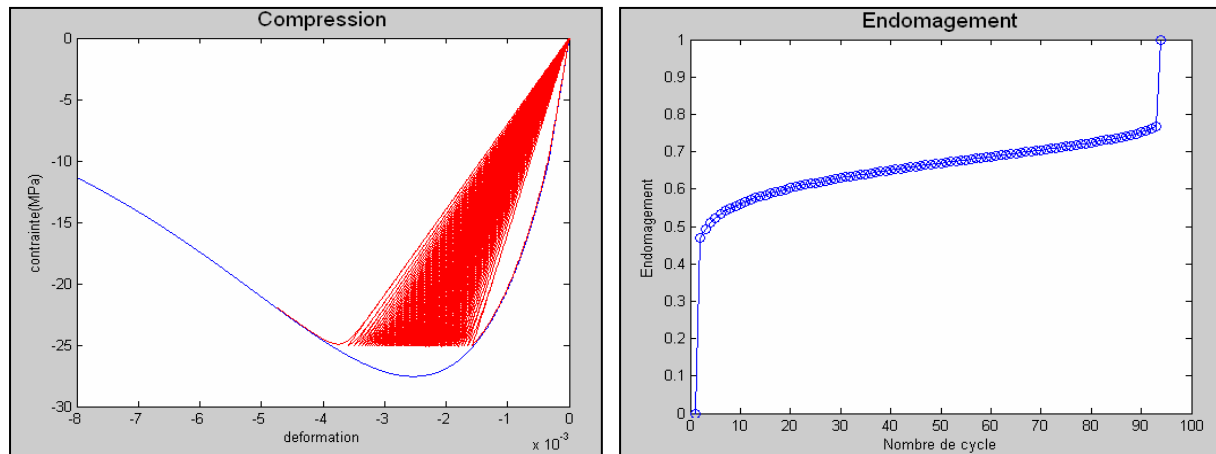
L'évolution de l'endommagement par fatigue sous chargement de compression est calculée par la formulation suivante (Marigo) :

$$\dot{d} = f^n(\varepsilon_{eq}, d) \left(\frac{a_1(1-a_2)}{\varepsilon_{eq}^2} + \frac{a_2 a_3}{e^{a_3(\varepsilon_{eq}-a_1)}} \right) \langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_+ \quad (4.34)$$

Pour les calculs numériques, nous prenons les paramètres suivants : $E = 30.000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.2$, $a_1 = 10^{-4}$, $a_2 = 1.4$, $a_3 = 1.85.10^3$.

Nous avons programmé l'évolution progressive de l'endommagement sous le logiciel MATLAB. Nous pouvons alors construire différents types de courbes de fatigue du béton.

Tout d'abord, nous présentons la courbe contrainte - déformation du béton sous chargement cyclique (fig. 4.1a). La courbe bleue représente le comportement sous chargement monotone et la courbe rouge représente le comportement sous chargement en fatigue (dans cet exemple, l'amplitude de chargement est égal à 90% de la résistance en compression).



a. Courbes contrainte – déformation

b. Evolution de l'endommagement

Figure 4.1 : Comportement de fatigue du béton sous chargement de compression

Nous observons bien une diminution progressive du module d'élasticité après chaque cycle de chargement. La limite de rupture sous chargement cyclique est bien contrôlée par le comportement sous chargement monotone.

Nous traçons ensuite la courbe d'évolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles de chargement (fig. 4.1b). Nous observons les trois phases classiques d'évolution du processus de fatigue :

- Phase 1 : une dégradation rapide pendant les premiers cycles (10% de la durée de vie totale)

- Phase 2 : une évolution stable de l'endommagement (80-90% de la durée de vie totale)
- Phase 3 : une rupture brutale

Enfin, nous faisons varier l'amplitude de chargement et nous calculons le nombre de cycles à rupture pour chaque niveau de chargement. Les résultats sont présentés (fig. 4.2) sous la forme d'une courbe de fatigue (courbe de Wöhler S – N).

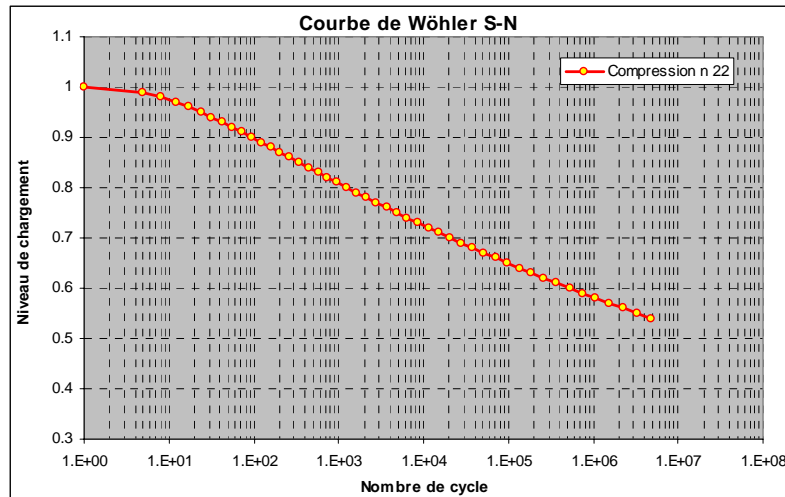


Figure 4.2 : Courbe de Wöhler numérique pour le chargement de compression

Il est bien évident que le temps de calcul augmente très vite quand le niveau de chargement diminue, car dans le même temps le nombre de cycles de chargement augmente (fig. 4.3). Pour le cas présenté ici, nous voyons que le temps de calcul augmente de façon exponentielle quand le niveau de chargement est inférieur à 0.6 (ou 60% de la charge maximale). Aussi, l'obtention d'une courbe de fatigue (courbe de Wöhler) dans le domaine allant de 1 à 10^7 cycles prend quelques jours en temps de calcul (Processeur Core2 Duo, 1.8 GHz, 2 Go de RAM).

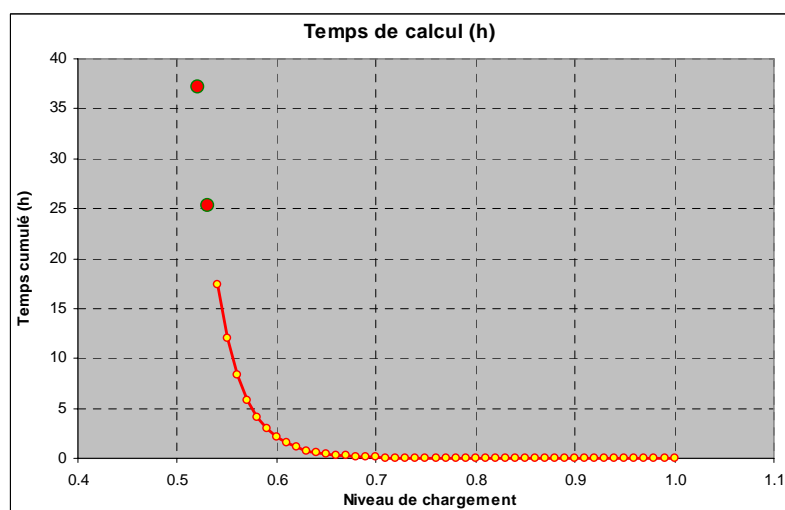


Figure 4.3 : Temps de calcul en fonction du niveau de chargement

La confrontation entre résultats numériques et expérimentaux (fig. 4.4) constitue une première étape de validation de la méthode utilisée dans ce travail. Nous observons que les courbes numériques nous permettent d'obtenir une meilleure corrélation avec les résultats expérimentaux que celle obtenue avec les courbes issues des modélisations linéaires. De plus, il est important de rappeler que ces courbes numériques sont issues d'une modélisation théorique (théorie de l'endommagement).

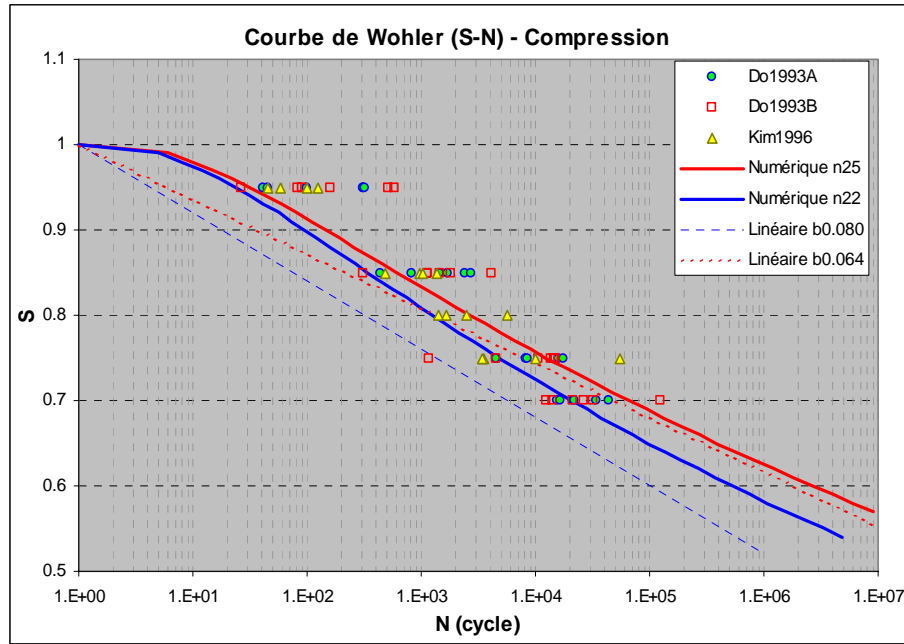


Figure 4.4 : Comparaison avec les résultats expérimentaux

Afin d'avoir une modélisation mathématique reproduisant la courbe de fatigue, nous considérons une distinction entre la fatigue à faible nombre de cycles (LCF) et la fatigue à grand nombre de cycles (HCF). Pour chaque type de fatigue, nous proposons une formule mathématique correspondante.

- Fatigue à faible nombre de cycles (LCF)

$$S = 1 - a.(\log N)^2 \quad (4.35)$$

- Fatigue à grand nombre de cycles (HCF)

$$S = b.N^c \quad (4.36)$$

Nous pouvons vérifier les équations (4.35) et (4.36) en les comparant avec les résultats numériques (fig. 4.5). Nous observons une bonne cohérence entre les courbes proposées et les résultats numériques (dans cet exemple, nous prenons les paramètres suivants : $a = 0.025$, $b = 1.12$, $c = -0.0475$ et $n = 25$).

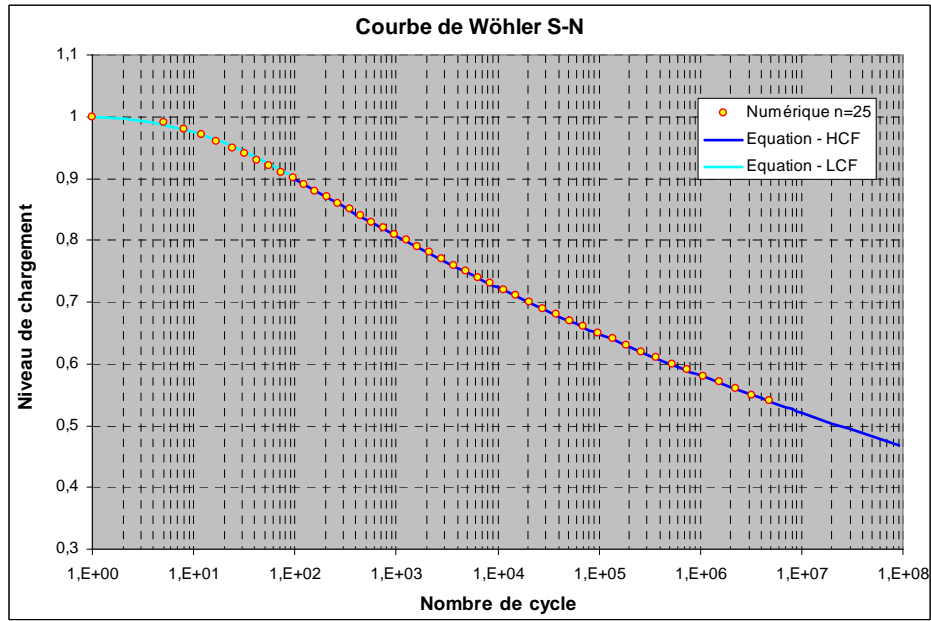


Figure 4.5 : Modélisation mathématique de la courbe de Wöhler

4.3.2. Fatigue sous chargement de traction

Pour le cas de la traction directe, nous avons :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1 \cdot \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1, \quad \sigma_1 > 0 \quad (4.37)$$

En utilisant la théorie de l'élasticité, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & * & * & & & \\ -\nu & * & * & & & \\ 0 & & & * & & \\ 0 & & & & * & \\ 0 & & & & & * \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

où : $E = (1-d) \cdot E_0$ est le module d'élasticité de l'état endommagé du matériau

Le champ de déformation pour le cas de chargement de compression s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_1 \cdot \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \varepsilon_2 \cdot (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \quad (4.39)$$

où :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \sigma_1 > 0, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \cdot \varepsilon_1 < 0 \quad (4.40)$$

La partie positive des déformations s'écrit :

$$[\underline{\varepsilon}]^+ = \varepsilon_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \quad (4.41)$$

La déformation équivalente devient :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} = \varepsilon_1 \quad (4.42)$$

La fonction jauge du modèle de Mazars prend la forme suivante :

$$f(\varepsilon_{eq}, d) = \frac{1-d}{\frac{a_1(1-a_2)}{\varepsilon_1} + \frac{a_2}{\exp[a_3(\varepsilon_1 - a_1)]}} \quad (4.43)$$

L'évolution de l'endommagement par fatigue sous chargement de traction est calculée à l'aide de la formulation suivante (Marigo) :

$$\dot{d} = f^n(\varepsilon_{eq}, d) \left(\frac{a_1(1-a_2)}{\varepsilon_1^2} + \frac{a_2 a_3}{e^{a_3(\varepsilon_1 - a_1)}} \right) \langle \dot{\varepsilon}_1 \rangle_+ \quad (4.44)$$

Pour les calculs numériques, nous prenons les paramètres suivants: $E = 30.000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.2$, $a_1 = 9.37 \cdot 10^{-5}$, $a_2 = 0.85$, $a_3 = 20.10^3$.

Nous pouvons tracer la courbe contrainte - déformation du béton sous chargement cyclique en traction (fig. 4.6). La courbe bleue représente le comportement sous chargement monotone et la courbe rouge représente le comportement sous chargement en fatigue (dans cet exemple, l'amplitude de chargement est égal à 90% de la résistance en traction).

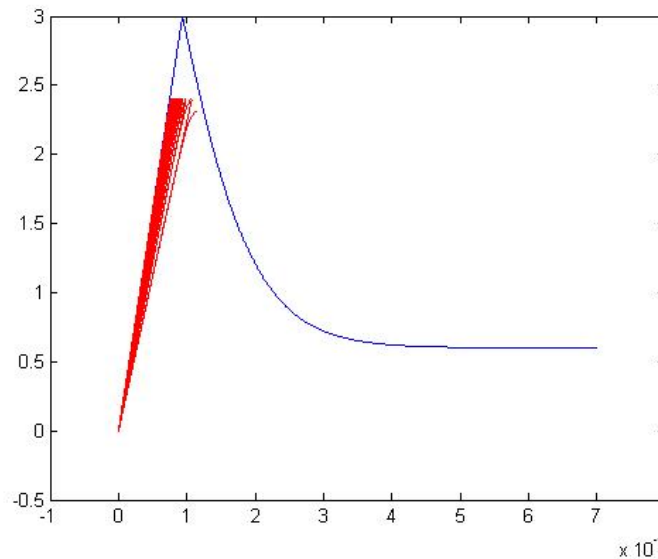


Figure 4.6 : Courbes contrainte – déformation dans le cas de la traction

Comme pour le cas de la compression, nous observons aussi une diminution progressive du module d'élasticité après chaque cycle de chargement. La limite de rupture sous chargement cyclique est bien déterminée par le comportement sous chargement monotone.

Les courbes de Wöhler pour la traction sont construites pour différentes valeurs du paramètre n (fig. 4.7). En comparant ces courbes avec des résultats expérimentaux trouvés dans la littérature, nous obtenons les valeurs de n pour la fatigue du béton en traction ($15 < n < 25$).

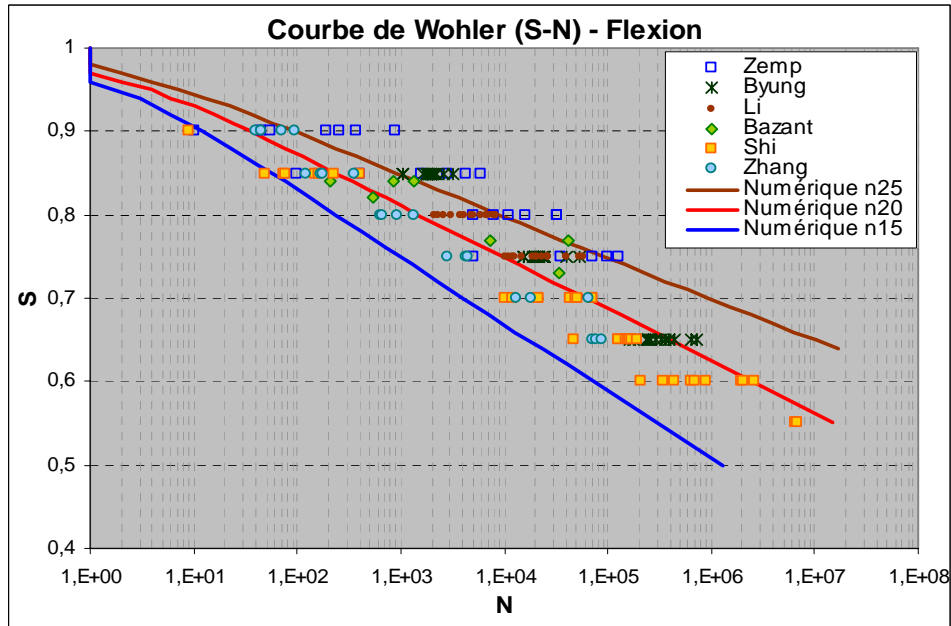


Figure 4.7 : Comparaison des courbes de Wöhler numériques avec les résultats expérimentaux

4.3.3. Fatigue sous chargement biaxial de traction - traction

Pour le cas du chargement biaxial traction - traction, nous avons :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1 \cdot \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_2 \cdot \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2, \quad \sigma_1 > \sigma_2 > 0 \quad (4.45)$$

En utilisant la théorie de l'élasticité, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & * & * & & & \\ -\nu & * & * & & & \\ 0 & & & * & & \\ 0 & & & & * & \\ 0 & & & & & * \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

où $E = (1-d) \cdot E_0$ est le module d'élasticité de l'état endommagé du matériau

Le champ de déformation pour le cas de chargement de compression s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_1 \cdot \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \varepsilon_2 \cdot \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \varepsilon_3 \cdot \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (4.47)$$

où :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{(1-d)E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{(1-d)E}(-\nu\sigma_1 + \sigma_2) \\ \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{(1-d)E}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases} \quad (4.48)$$

Nous voyons que $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_3 < 0$, $\varepsilon_2 < 0$ si $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} < \nu$ et $\varepsilon_2 > 0$ si $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \geq \nu$,

La partie positive des déformations devient :

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}]^+ = \begin{cases} \varepsilon_1 \cdot \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 & \text{si } \frac{\sigma_2}{\sigma_1} < \nu \\ \varepsilon_1 \cdot \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \varepsilon_2 \cdot \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 & \text{si } \frac{\sigma_2}{\sigma_1} > \nu \end{cases} \quad (4.49)$$

La déformation équivalente s'écrit :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{si } \frac{\sigma_2}{\sigma_1} < \nu \\ \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} & \text{si } \frac{\sigma_2}{\sigma_1} > \nu \end{cases} \quad (4.50)$$

La fonction jauge du modèle de Mazars est calculée à l'aide de la formule suivante :

$$f(\varepsilon_{eq}, d) = \frac{1-d}{\frac{a_1(1-a_2)}{\varepsilon_{eq}} + \frac{a_2}{\exp[a_3(\varepsilon_{eq} - a_1)]}} \quad (4.51)$$

L'évolution de l'endommagement par fatigue sous chargement de traction – traction est calculée par la formule suivante (Marigo) :

$$\dot{d} = f^n(\varepsilon_{eq}, d) \left(\frac{a_1(1-a_2)}{\varepsilon_{eq}^2} + \frac{a_2 a_3}{e^{a_3(\varepsilon_{eq} - a_1)}} \right) \langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_+ \quad (4.52)$$

Afin d'étudier l'influence de la deuxième composante (S_2) des contraintes principales, nous fixons la première composante (S_1) et nous faisons varier la valeur de S_2 de 0 à S_1 . Nous calculons le nombre de cycles de chargement jusqu'à la rupture pour chaque valeur de S_2 et nous traçons la courbe représentant le nombre de cycles en fonction du ratio S_2/S_1 (fig. 4.8).

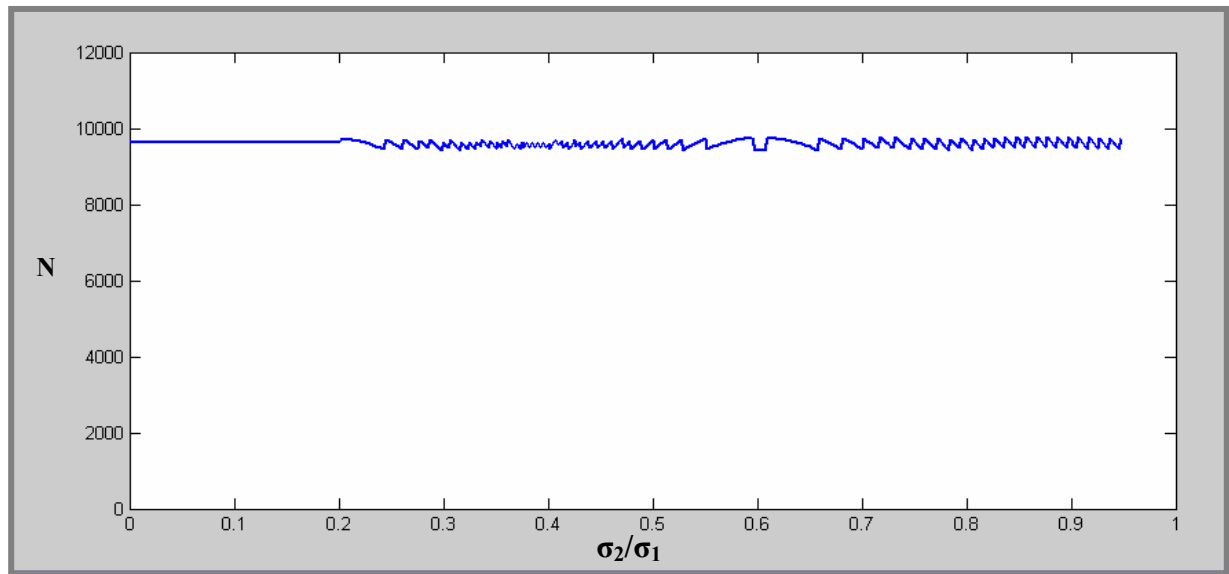


Figure 4.8 : Nombre de cycles à la rupture en fonction du rapport des contraintes principales

Dans cet exemple, nous avons pris le coefficient de Poisson $\nu = 0.2$ et le niveau de chargement $S_1/R = 0.8$ (R est la résistance en traction).

Nous pouvons remarquer que si $S_2/S_1 < \nu = 0.2$, la deuxième composante des contraintes principales n'a pas d'influence sur la durée de vie. Cela peut être expliqué par la formule (4.50).

Une autre remarque est que la durée de vie (nombre de cycles jusqu'à la rupture) ne varie pas beaucoup quand la deuxième composante S_2 varie. La variation de la durée de vie est :

$$\frac{9800 - 9400}{9650} \cdot 100\% = \frac{400}{9650} \cdot 100\% = 4\%$$

Si nous considérons l'hétérogénéité du matériau béton, cette variation (4 %) n'est pas significative. C'est la raison pour laquelle nous ne prenons que la contrainte principale maximale pour calculer la fatigue du béton sous chargement cyclique traction – traction. Cette conclusion est très importante pour le dimensionnement de la dalle de voie dont nous allons parler dans la section 4.5.

4.4. Etude expérimentale de la fatigue du béton

La détermination expérimentale des courbes de Wöhler pour un type de béton est l'objectif de nos essais de fatigue. Deux type d'essais ont été planifiés : traction directe et flexion.

L'essai de traction directe est évidemment le plus significatif pour déterminer, de façon intrinsèque, la résistance à la traction sous chargement statique et de fatigue. Mais, étant donnée la fragilité du béton, ce type d'essai est très délicat et coûteux à réaliser. Nous allons présenter quelques résultats de rupture sous chargement statique en traction directe. Cependant, les essais de fatigue en traction directe ne sont pas présentés dans ce mémoire. Les problèmes techniques que nous avons rencontrés et des contraintes du temps ne nous ont pas permis de mener à bien ces essais.

Les essais en flexion trois points étant plus simples à mettre en œuvre, nous avons choisi ce mode opératoire. Nous avons donc testés au total 42 éprouvettes rectangulaires (21 éprouvettes pour les essais statiques et 21 éprouvettes pour les essais de fatigue). Ces essais ont été réalisés à l'aide de trois vérins hydrauliques et un programme de pilotage écrit sous LabView. Nous détaillons ces essais en flexion trois points dans la suite de cette section.

4.4.1. Description de la procédure expérimentale

a. Formulation du béton :

La première étape consiste à trouver une formulation du béton utilisant les granulats locaux qui donne un matériau béton avec les caractéristiques voulues (nous voulons reproduire les caractéristiques du béton utilisé dans un projet ferroviaire chez ALSTOM Transport). Pour cela, nous avons utilisé le logiciel BetonLab du laboratoire des Ponts et Chaussées (LCPC) et nous avons trouvé trois formulations correspondantes à nos attentes (tableau 4.1).

Remarques :

- Granulats : Silex marin 4/12.5 mm
- Sable : Calcaire dur 0/4 mm
- Ciment : CEM II/A 32.5 N
- SuperPlastifiant : ChrysoFluid GT

	Formule 1	Formule 2	Formule 3
Granulats (kg/m ³)	1074.1	1078.7	1055.1
Sable (kg/m ³)	834.7	838.2	819.9
Ciment (kg/m ³)	330	350	350
SuperPlastifiant (kg/m ³)	2.2	3.5	3.5
Eau (kg/m ³)	161.7	150.6	169.6
E _{eff} /C	0.455	0.399	0.454
Affaissement (cm)	15.6	16	22.8
Résistance en compression à 7 jours (MPa)	30.6	39.1	31
Résistance en compression à 28 jours (MPa)	36.7	45	37
Résistance en traction à 28 jours (MPa)	3.2	3.6	3.2
Module d'élasticité à 28 jours (GPa)	37.6	41.3	36.3
Densité (kg/m ³)	2403	2421	2398

Tableau 4.1 : Trois formulations théoriques

Afin de vérifier et de pouvoir choisir la meilleure formulation, nous avons coulé 9 éprouvettes cylindriques de taille 110x220mm (3 éprouvettes pour chaque formulation). Puis, nous avons testé les caractéristiques de ces bétons en réalisant des essais de compression sur des éprouvettes surfacées à l'âge de 7 jours.

Les résultats des essais en compression à 7 jours sont donnés dans le tableau 4.2. La vitesse de chargement est égale à 3 kN/s.

Force (kN)	Formule 1	Formule 2	Formule 3
Eprouvette 1	291	325	305
Eprouvette 2	279	315	283
Eprouvette 3	277	291	300
Moyenne (kN)	282	310	296
Théorique (kN)	306	391	310
Erreur (%)	7.8 %	21 %	4.5 %

Tableau 4.2 : Résultats d'essais en compression à 7 jours

La troisième formulation du béton nous donne un meilleur résultat au niveau des caractéristiques mécaniques ainsi qu'au niveau de la facilité de mise en oeuvre. Cette formulation est choisie pour notre campagne d'essais de fatigue.

b. Coulage et conservation des éprouvettes :

Les granulats et les sables sont séchés en étude à 80°C pendant au moins 2 jours avant le coulage. Le mélange est réalisé à l'aide d'un malaxeur qui tourne à une vitesse de 30 tr/min. La procédure de mélange qui dure en tout quatre minutes est la suivante:

- Mélanger le ciment, les granulats, et le sable pendant 1 minute et 30 secondes
- Ajouter l'eau et mélanger 1 minute
- Ajouter l'adjuvant et mélanger encore 1 minute et 30 secondes

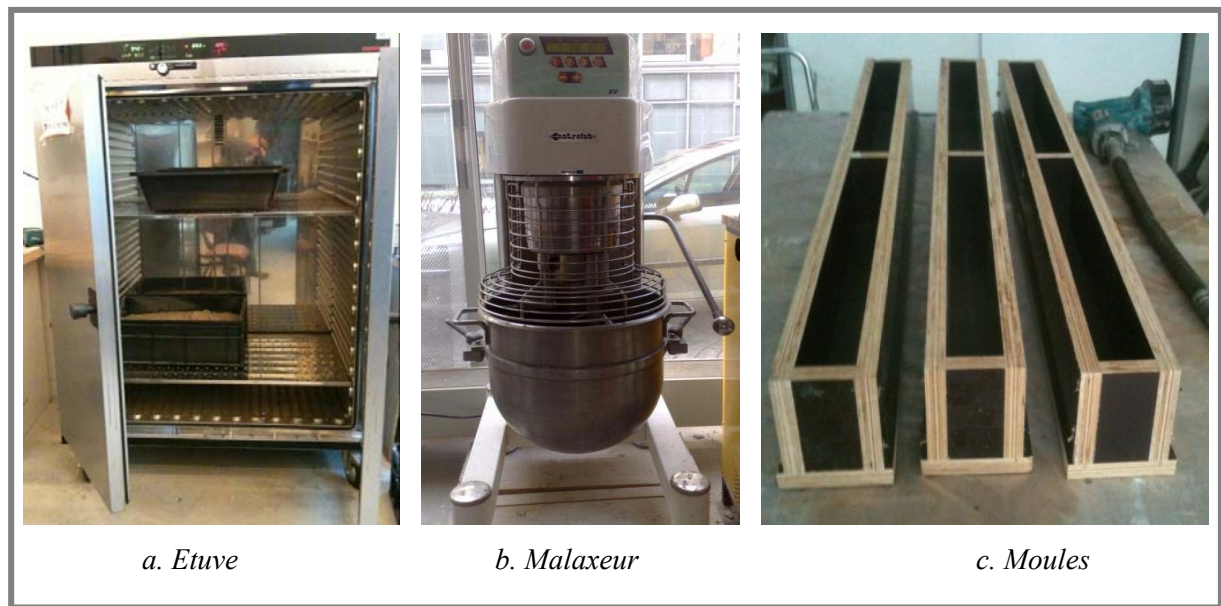


Figure 4.9 : Moyens de mise en oeuvre

Les éprouvettes sont conservées dans une armoire humide (humidité 98%, T = 20°C) jusqu'au jour de l'essai (l'âge moyen des éprouvettes est de 60 jours).

c. Montage et pilotage des essais

Les essais de flexion sont réalisés en série de trois à l'aide de trois vérins hydrauliques de capacité 25kN (fig. 4.10).

Les essais en traction directe sont réalisés à l'aide d'une presse hydraulique de traction /torsion de capacité 100kN/1600N.m MTS. Ces essais nécessitent l'utilisation de casques métalliques (aluminium) collés aux extrémités des éprouvettes (fig. 4.11). La colle utilisée est un mortier de scellement sika AnchorFix-1 fourni par la société Sika

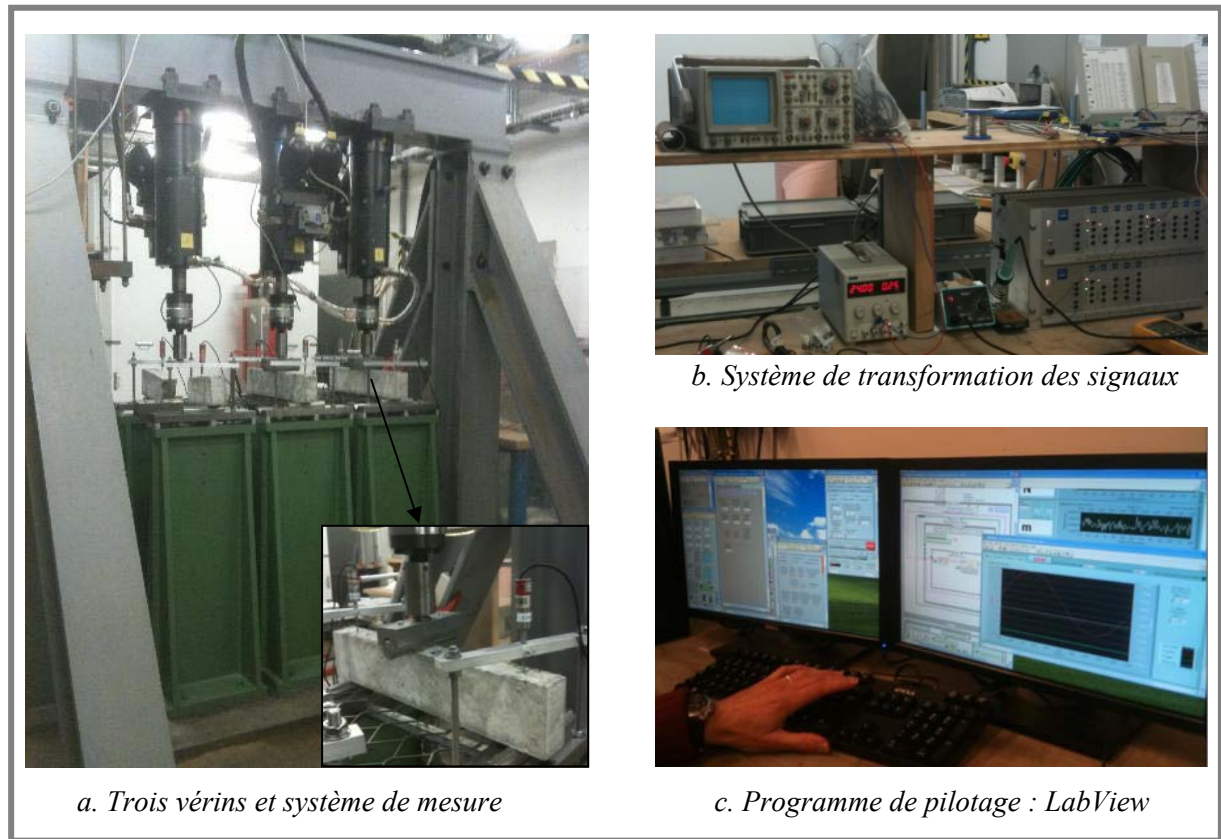


Figure 4.10 : Montage et pilotage des essais

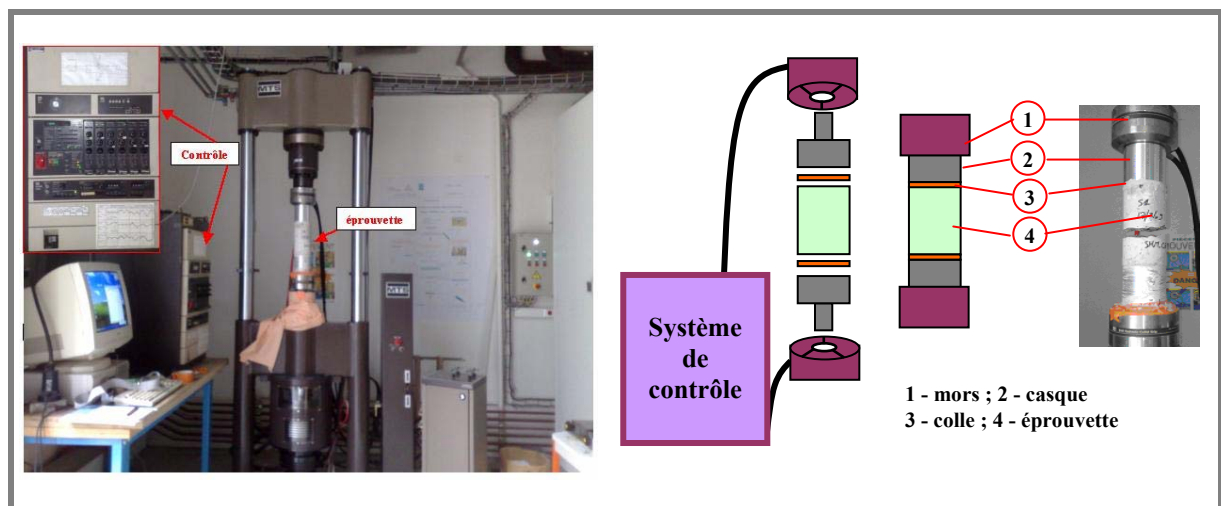


Figure 4.11 : Montage expérimental pour les essais en traction directe

Les essais statiques sont contrôlés en déplacement et les essais en fatigue sont contrôlés en force (suivant un signal sinusoïdal). Le pilotage des essais est réalisé avec le logiciel LabView.

4.4.2. Présentation des résultats expérimentaux

a. Les ruptures typiques observées pour les différents types d'essai

Nous présentons ici la rupture des éprouvettes cylindriques et parallélépipédiques sous chargement de compression (fig. 4.12), de traction directe (fig. 4.13), et de flexion trois points (fig. 4.14).

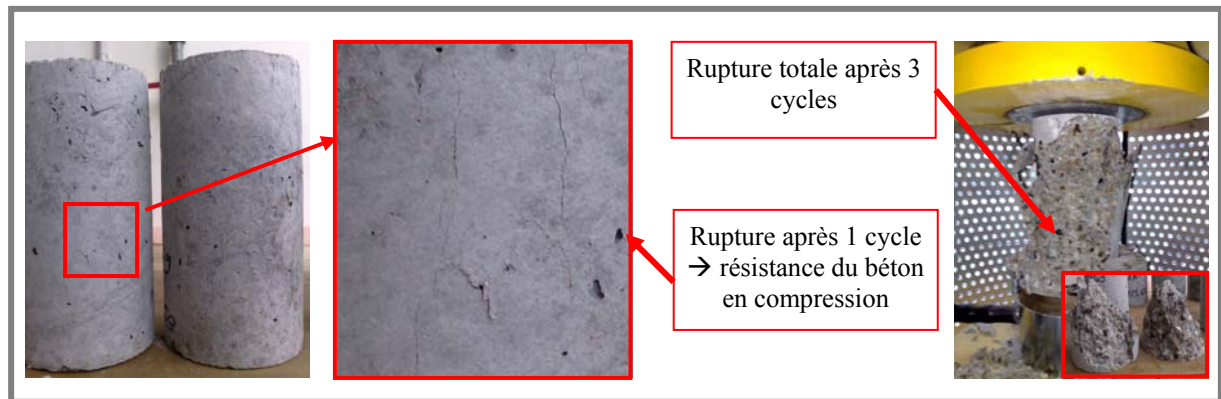


Figure 4.12 : Rupture des éprouvettes cylindriques en compression

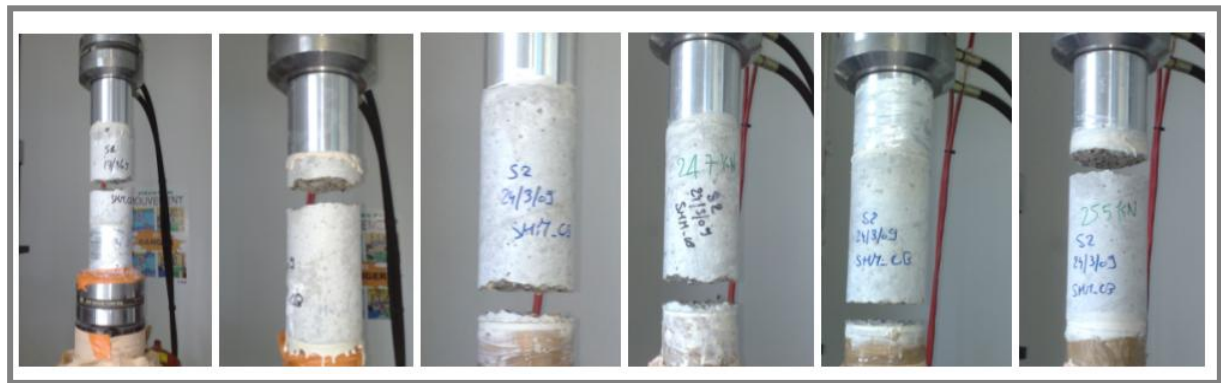


Figure 4.13 : Rupture des éprouvettes cylindriques en traction directe

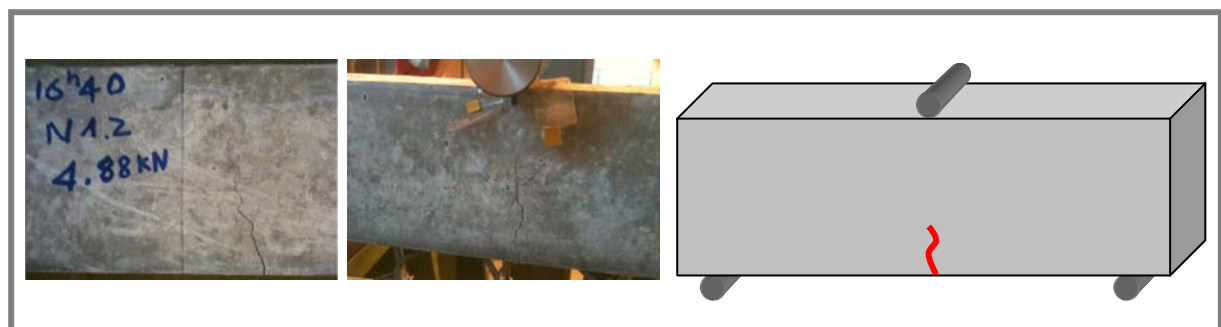


Figure 4.14 : Rupture des éprouvettes parallélépipédiques en flexion trois points

b. Résultats d'essais

Nous présentons dans cette section les résultats expérimentaux pour les essais de flexion trois points. Six éprouvettes ont été coulées pour chaque gâchée de béton. Trois essais statiques sont réalisés pour déterminer la résistance statique du béton dans chaque gâchée. Les résultats sont donnés dans le tableau 4.3. La valeur moyenne et l'écart type sont calculés par :

$$F_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i$$

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{\sum F_i^2}{n} - F_m^2}$$

Numéro de gâchée	Eprouvette 1 (N)	Eprouvette 2 (N)	Eprouvette 3 (N)	Moyenne (N)	Ecart type
1	4400	4700	4850	4650	187
2	4150	4450	4430	4343	137
3	4750	5050	5150	4983	170
4	5250	4880	5140	5090	155
5	4400	4700	4300	4467	170
6	4500	4600	4700	4600	82

Tableau 4.3 : Force statique maximale sous sollicitation en flexion

La figure 4.15 montre une courbe force – déplacement maximale typique obtenue pour un essai de flexion trois points sous chargement statique contrôlé en déplacement.

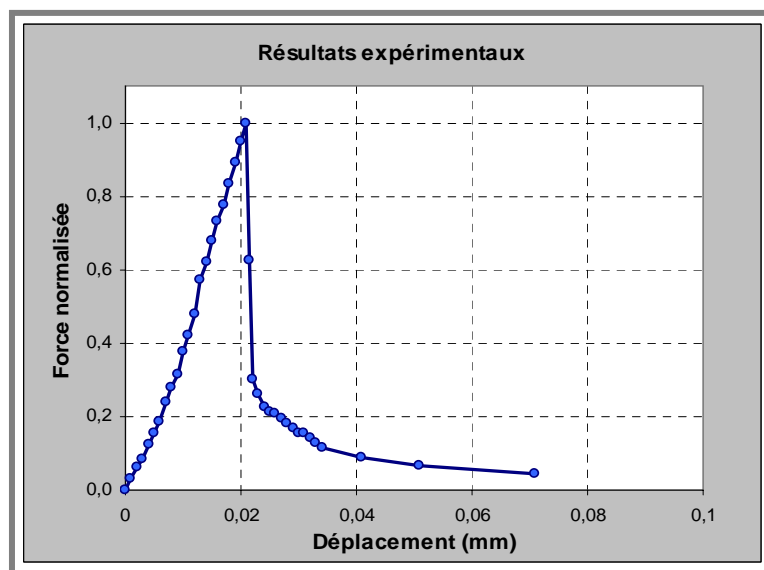


Figure 4.15 : Courbe force – déplacement maximal pour un essai de flexion trois points

Les essais de fatigue du béton en flexion sont réalisés pour cinq niveaux de chargement (entre 0.6 et 0.84). Trois éprouvettes sont testées pour chaque niveau de chargement. Les résultats sont donnés dans le tableau 4.4. Une éprouvette n'était toujours pas rompue après 40 millions de cycle pour un chargement à 60% de la résistance ($S=0.6$).

Numéro de l'éprouvette	$S = 0.6$	$S = 0.71$	$S = 0.74$	$S = 0.80$	$S = 0.84$
1	1600000	118000	59000	20000	1000
2	3600000	122000	63000	25000	1250
3	>40000000	200000	100000	35000	3100

Tableau 4.4 : Nombre de cycles de chargement de fatigue du béton en flexion

Nous pouvons représenter ces résultats sous la forme d'un graphique (courbe de Wöhler) (fig. 4.16).

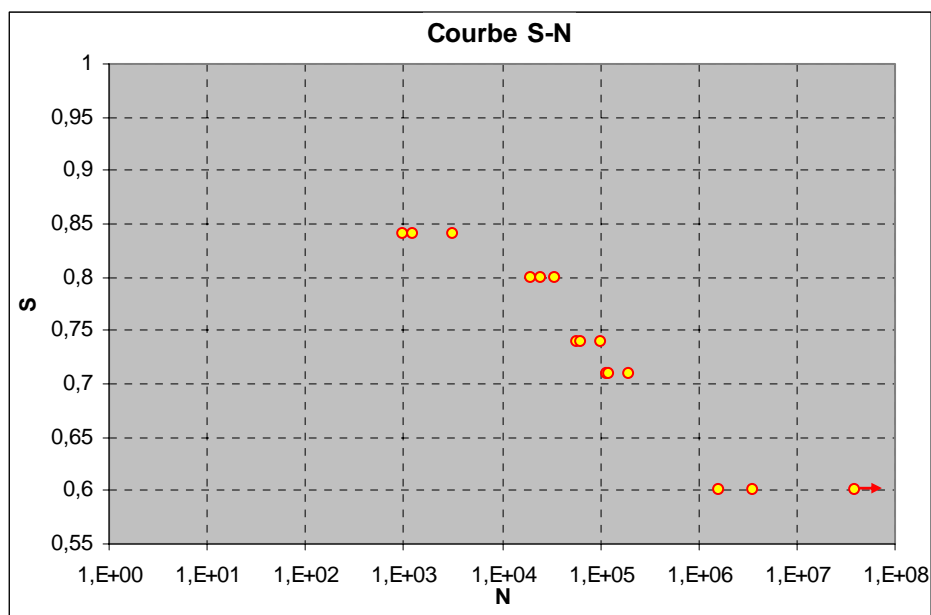


Figure 4.16 : Résultats expérimentaux - Fatigue du béton en flexion

En utilisant la méthode présentée dans la section précédente (section 4.3), nous trouvons que nos résultats expérimentaux sont bien représentés par la courbe numérique avec $n = 25$ (fig. 4.17).

En comparant nos résultats expérimentaux avec ceux de la littérature, nous observons par ailleurs que la résistance en fatigue de notre béton est légèrement plus importante que la résistance en fatigue des bétons recensés dans la littérature (fig. 4.18).

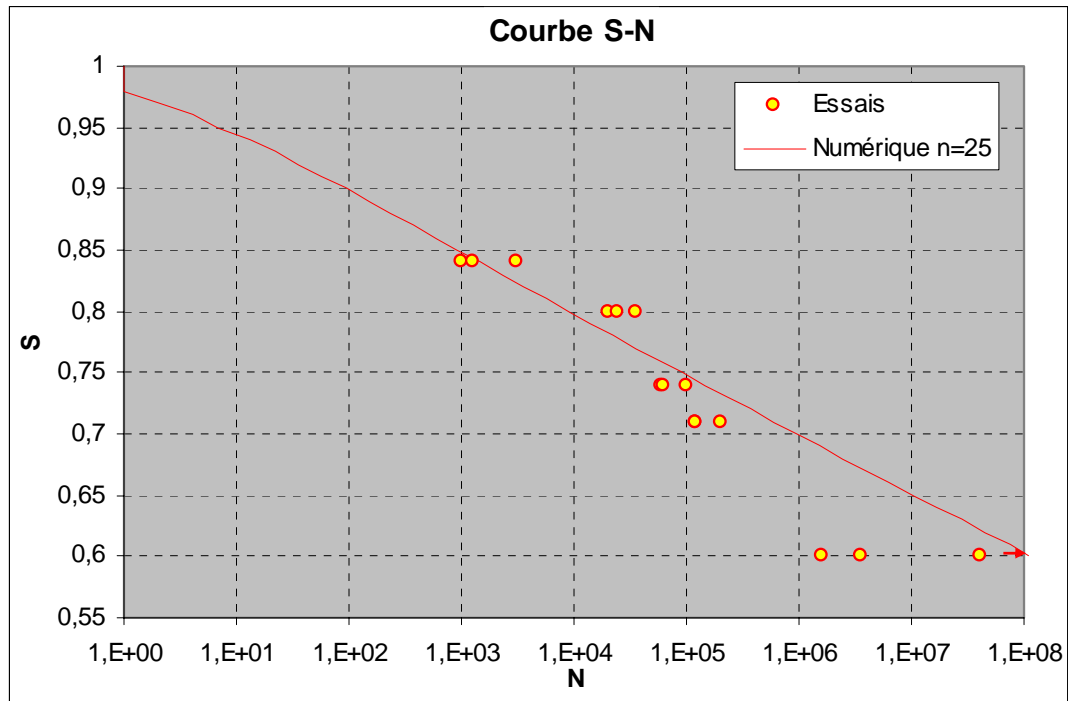


Figure 4.17 : Comparaison des résultats expérimentaux avec la courbe numérique

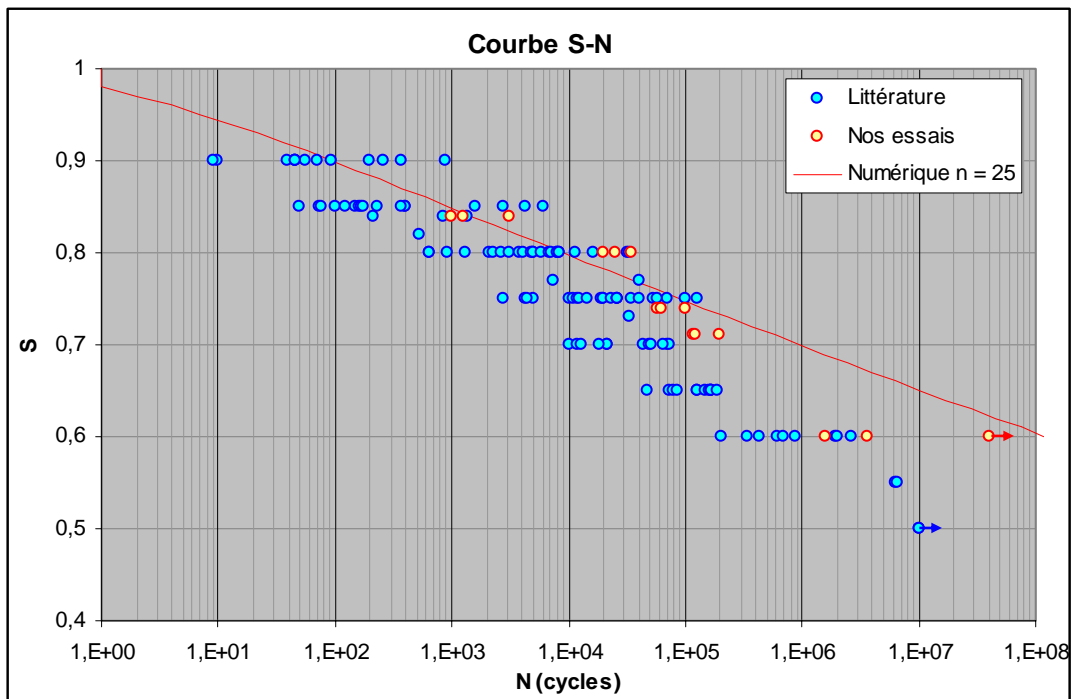


Figure 4.18 : Comparaison avec les autres essais dans la littérature

4.5. Application – Dimensionnement des dalles ferroviaires en béton

Nous allons présenter dans cette section comment utiliser la méthode développée dans ce chapitre pour améliorer la méthode de dimensionnement en fatigue des dalles en béton des voies ferrées urbaines.

4.5.1. Problématique

Les composants d'une voie ferrée urbaine standard sont le rail, le système d'attache (semelle, ancrage), les selles, la dalle de voie en béton, la dalle de fondation, et le sol support (fig. 4.19).

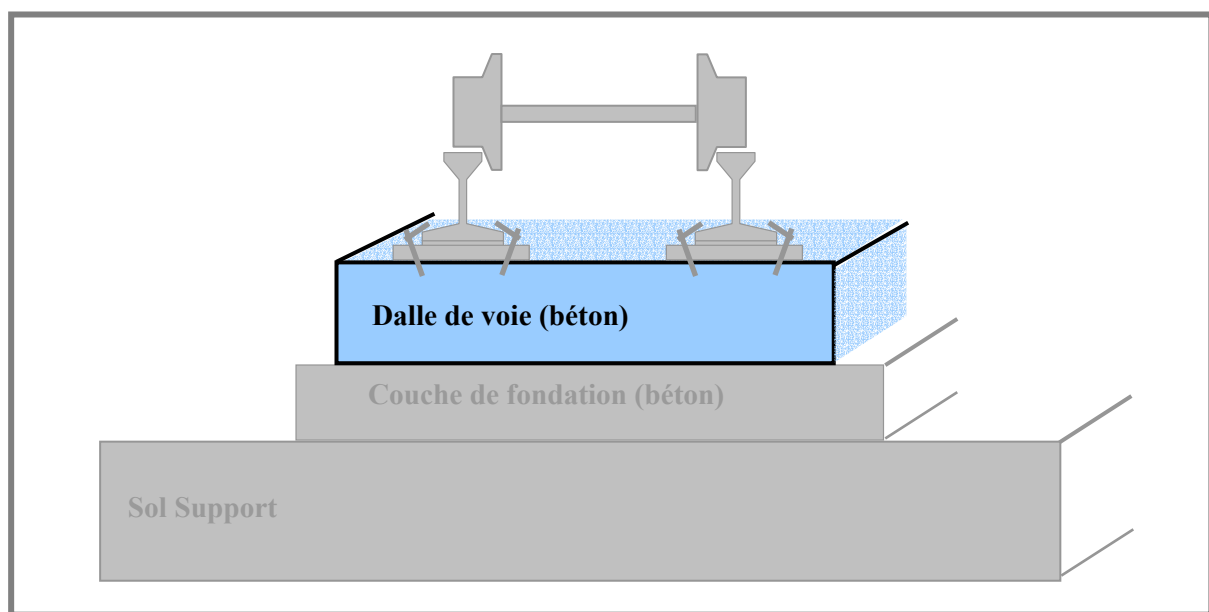


Figure 4.19 : Structure d'une voie ferrée urbaine standard

La dalle de voie en béton joue un rôle très important pour la stabilisation du système ferroviaire. Elle est souvent coulée par morceau de 5m de long afin de mieux contrôler les fissures de retrait. Ces morceaux sont connectés par des goujons.

Pour dimensionner la dalle de voie, nous fixons sa largeur, puis, nous optimisons sa hauteur en fonction de la durée de vie souhaitée (par exemple, 30 ans). Le dimensionnement de la dalle de voie est réalisé en respectant les étapes suivantes :

- Modélisation 3D du système de la voie ferrée
- Identification des sollicitations critiques
- Calcul des champs de contrainte dans la dalle de voie par la méthode des éléments finis
- Post-traitement en fatigue par la méthode de l'endommagement

4.5.2. Modélisation 3D de la voie ferrée

Nous utilisons le logiciel ANSYS Workbench pour modéliser la voie. La géométrie est construite à l'aide du module ANSYS DesignModeler.

Géométrie et maillage

Notre but étant de calculer les contraintes dans la dalle de voie, nous simplifions la modélisation des autres composantes de la voie en utilisant les formes rectangulaires (fig. 4.20). Les dimensions du rail modélisé sont choisies pour qu'il ait la même inertie que le rail réel.

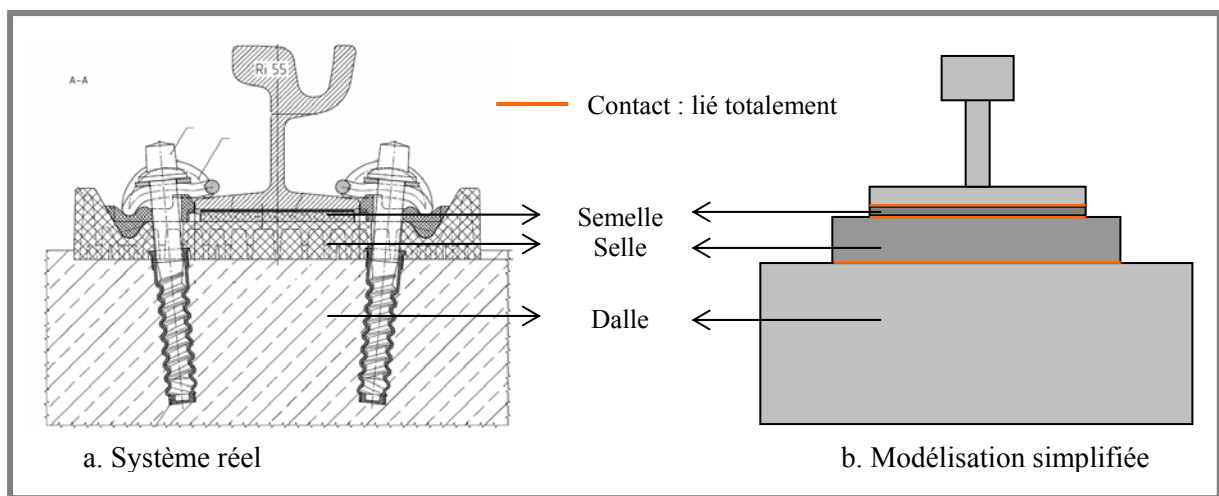
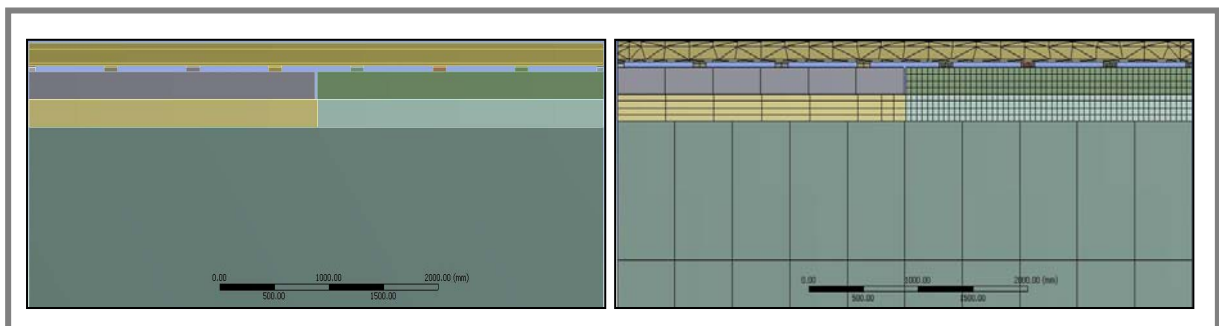


Figure 4.20 : Modélisation simplifiée du rail et du système d'attache

Grâce à la symétrie de notre système, nous ne modélisons que la moitié de la voie (un rail). La longueur de la voie doit être assez grande pour s'affranchir des conditions aux limites (pour un chargement statique, une voie de 20m est largement suffisante).



a. Géométrie

b. Maillage

Figure 4.21 : Géométrie et maillage de la voie ferrée

Simulation numérique

Les caractéristiques des matériaux sont données dans le tableau 4.5.

	E (MPa)	ν
Rail	210000	0.3
Semelle	20	0.45
Selle	50000	0.3
Dalle de voie	35000	0.2
Dalle de fondation	25000	0.2
Sol	50	0.35

Tableau 4.5 : Caractéristiques des matériaux

Nous modélisons la charge du bogie par deux forces ponctuelles appliquées sur le rail. Pour une charge à la roue de 60kN, nous obtenons les champs de contraintes dans la dalle de voie comme le montre les figures ci-dessous :

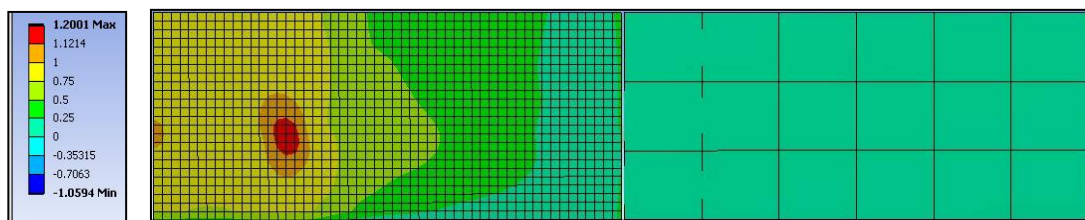


Figure 4.22 : Champs de contraintes principales maximales dans la dalle de voie

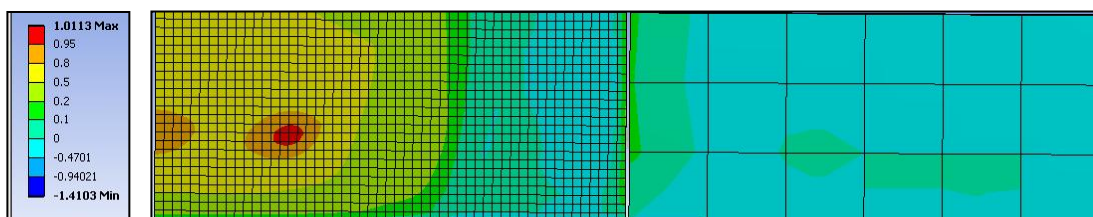


Figure 4.23 : Champs de contraintes principales intermédiaires dans la dalle de voie

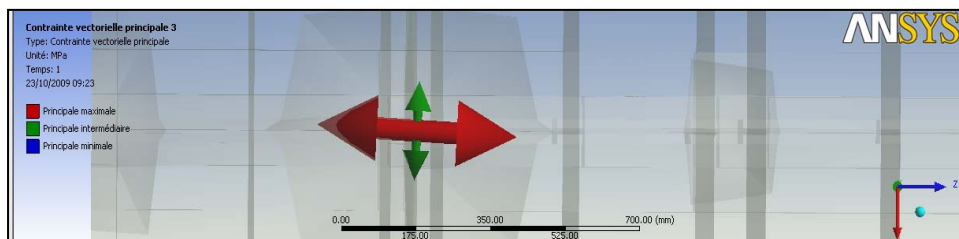


Figure 4.24 : Orientation des contraintes principales au point critique dans la dalle de voie

4.5.3. Post-traitement en fatigue - Dimensionnement de la dalle

A partir des résultats de calcul éléments finis, nous observons que le point critique (où les contraintes sont maximales) se situe bien sur la face inférieure de la dalle et en dessous de la charge. Les contraintes principales obtenues à ce point critique sont :

- Contrainte principale maximale : $\sigma_1 = 1.2 \text{ MPa}$
- Contrainte principale intermédiaire : $\sigma_2 = 1.0 \text{ MPa}$

Pour le calcul en fatigue, nous ne prenons que la contrainte principale maximale car la contrainte principale intermédiaire n'a pas d'influence significative (section 4.3.3).

Supposons que la résistance en traction du béton est $R = 3 \text{ MPa}$. Le niveau de chargement de fatigue devient :

$$S = \frac{\sigma_1}{R} = \frac{1.2}{3} = 0.4$$

Supposons en plus que nous voulons dimensionner la voie pour 10^7 cycles (équivalent à 30 ans). En utilisant les résultats obtenus dans la section 4.3.2, nous pouvons conclure que si le niveau de chargement est inférieur à 0.44, la durée de vie est supérieure à 10^7 cycles (fig. 4.26). Cela veut dire que la dalle de voie aura dans notre exemple une durée de vie plus de 30 ans car le niveau de chargement est $S = 0.44$.

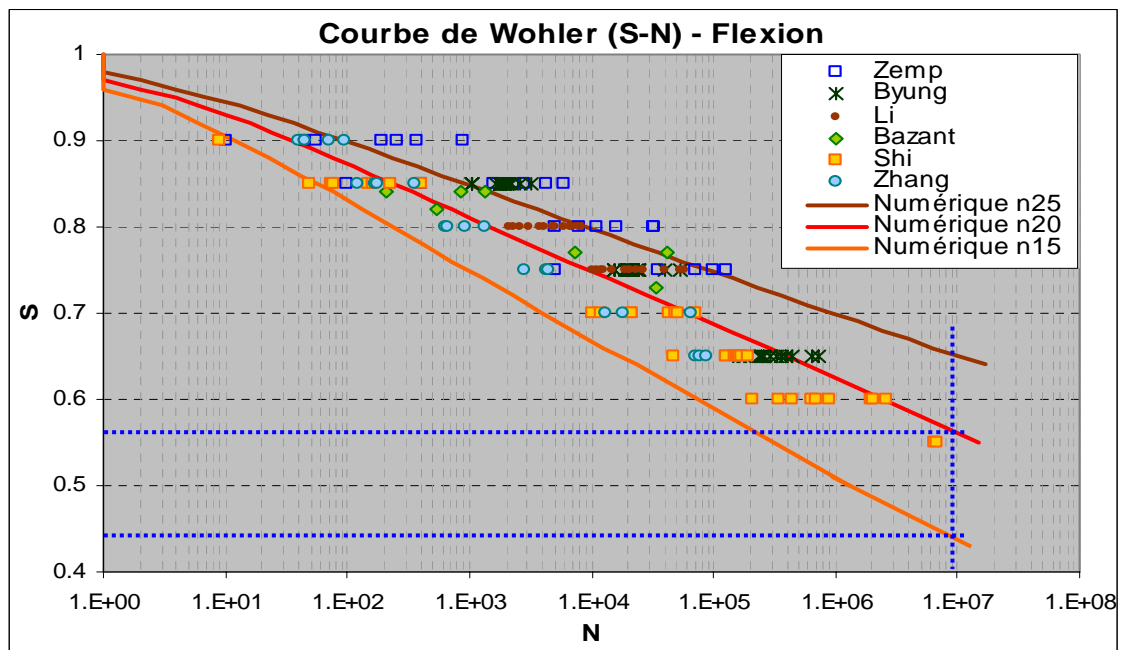


Figure 4.26 : Application des courbes de Wöhler au dimensionnement de la dalle de voie en béton

4.6. Conclusions

En utilisant les modèles simples, nous pouvons modéliser la dégradation progressive de la rigidité du matériau sous chargement cyclique. Nous arrivons à reproduire les trois phases d'évolution classique de la fatigue du béton.

Nous pouvons aussi construire numériquement les courbes de Wöhler du béton sous chargement de traction ou de compression. Ces courbes numériques représentent parfaitement les résultats expérimentaux. L'avantage des calculs numériques est que nous pouvons tracer les courbes de Wöhler jusqu'à un très grand nombre de cycles qu'il est difficile d'atteindre par l'approche expérimentale à cause des capacités limitées des machines et/ou des contraintes de temps.

Les calculs dans le cadre d'un chargement biaxial traction – traction, nous permettent de montrer que la deuxième composante de traction n'influence pas sur la fatigue du béton. Ce résultat est très intéressant pour le dimensionnement des dalles ferroviaires qui subissent des charges biaxiales au niveau des faces inférieures.

Afin de vérifier les calculs numériques et d'identifier les paramètres de notre béton, nous avons réalisé une campagne d'essais en laboratoire sur les éprouvettes parallélépipédiques en flexion. Les résultats expérimentaux obtenus montrent une bonne cohérence avec les résultats d'essais trouvés dans la littérature, avec cependant une résistance à la fatigue légèrement plus élevée.

Enfin, nous présentons dans la dernière section de ce chapitre une application sur le dimensionnement de la dalle de voie en béton pour les voies ferrées urbaines. Un calcul simple peut nous confirmer la performance en fatigue d'une dalle de voie.

Chapitre 5

Propagation des fissures du béton – Lattice model

Sommaire du chapitre 5

5.1. Théorie des équivalences	128
5.1.1. Exposé général	128
5.1.2. Modèles de réseaux de barres.....	131
5.1.3. Modèles de réseaux de poutres.....	134
5.2. Implantation numérique.....	135
5.2.1. Présentation générale du code de calcul CESAR-LCPC.....	135
5.2.2. Algorithme pour le cas de chargements statiques	137
5.2.3. Algorithme pour le cas de chargement en fatigue	140
5.3. Propagation des fissures sous chargement statique	143
5.3.1. Flexion trois points symétrique	143
5.3.2. Flexion trois points dissymétrique	147
5.3.3. Flexion quatre points d'une poutre en béton armé	149
5.3.4. Cisaillement.....	150
5.3.5. Traction dissymétrique	151
5.4. Propagation des fissures par fatigue	152
5.5. Conclusions	155

5.1. Théorie des équivalences

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux modèles discrets pour modéliser la propagation des fissures dans le matériau béton. Nous nous concentrons spécifiquement sur le modèle de réseau de poutres (lattice model). La base théorique de ce modèle est la théorie des équivalences dont nous allons rappeler le principe dans la section ci-dessous.

5.1.1. Exposé général

La théorie des équivalences proposée par Absi (1978) est une méthode de résolution numérique permettant de substituer à l'étude d'un corps continu chargé C celle d'un autre corps C' généralement discret. L'idée principale est d'approcher l'énergie potentielle totale du corps C par celle du corps C' .

Considérons un corps déformable C occupant un volume Ω et soumis à un chargement dérivant d'un potentiel P . Le potentiel total Π du corps C s'écrit alors :

$$\Pi = W + P \quad \text{ou} \quad \Pi = \int_{\Omega} w d\Omega + P \quad (5.1)$$

Où W est le potentiel de déformation du corps C , et w est sa densité volumique.

Dans le cas d'un comportement élastique, la résolution de ce problème revient à trouver un champ de déplacement cinématiquement admissible minimisant la fonction Π ($\delta\Pi = 0$). Considérons maintenant un autre corps C' occupant le même volume Ω et soumis au même chargement que le corps C . En désignant par w' sa densité d'énergie de déformation. Le potentiel total Π' du corps C' s'écrit :

$$\Pi' = \int_{\Omega} w' d\Omega + P \quad (5.2)$$

Dans le cas d'un comportement élastique, la résolution de ce problème revient aussi à trouver un champ de déplacement cinématiquement admissible minimisant la fonction Π' ($\delta\Pi' = 0$).

Dans le cas où ($\delta\Pi = \delta\Pi'$), les deux systèmes sont dits équivalents. Ils admettent le même champ de déplacement solution. En effet, tout champ de déplacement solution du premier problème l'est aussi pour le second et l'on doit avoir $\delta\Pi = \delta\Pi' = 0$. Il y a en particulier équivalence dans le cas où les deux densités d'énergie de déformation sont égales ($w = w'$).

La théorie des équivalences s'applique aussi dans le cas où $\Pi = \alpha \cdot \Pi'$ (α est un coefficient quelconque), même si les deux corps n'occupent pas le même volume Ω . Dans ce cas, on retrouve la condition de similitude entre un corps réel et son modèle réduit.

Enfin, l'équivalence peut être réalisée entre deux corps continus ou entre deux corps discrets ou bien entre un corps continu et un corps discret.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons essentiellement à l'équivalence entre un milieu continu bidimensionnel et un milieu discret formé par un réseau de barres ou de poutres (fig. 5.1).

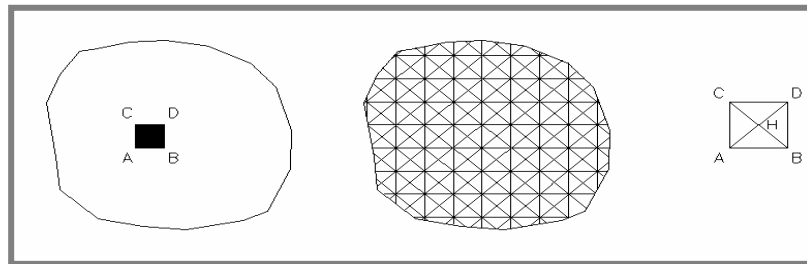


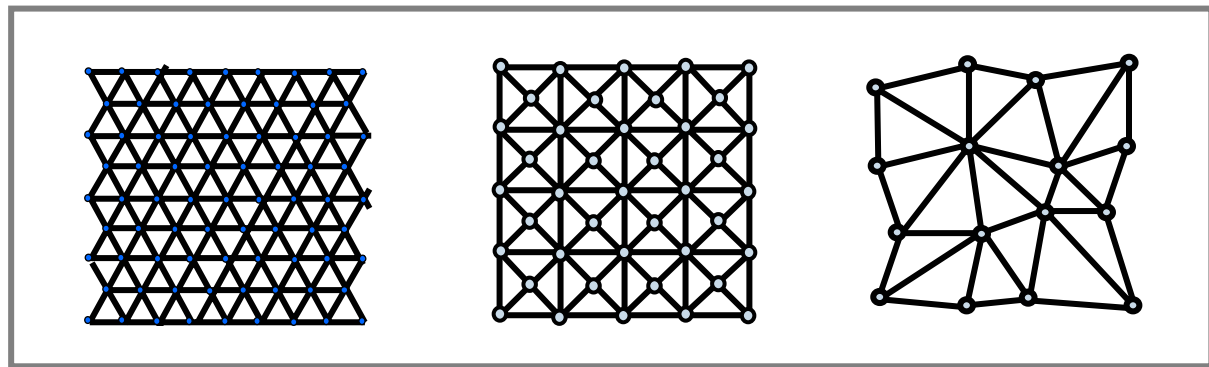
Figure 5.1 : Lattice Model

Lattice model

Soit un milieu continu bidimensionnel C homogène et élastique isotrope occupant un volume Ω . Ce milieu, caractérisé par un module d'Young E et un coefficient de Poisson ν , est en équilibre sous l'action d'un chargement classiquement décrit par des données statiques (forces de volume, forces surfaciques) et des données cinématiques complémentaires (conditions aux limites).

Nous substituons à ce milieu continu un milieu discret équivalent. Le milieu discret est un réseau de barres ou de poutres dont la rigidité globale est équivalente à celle du milieu continu. Ici l'équivalence entre le milieu continu et le milieu discret a le même sens énergétique que celui qui fonde la méthode des éléments finis. En particulier, le champ de déplacement obtenu par extrapolation des déplacements aux nœuds du réseau constitue une estimation du champ de déplacement du milieu continu aussi précise que celle obtenue avec un calcul éléments finis.

Différents types de maillage peuvent être utilisés : maillage triangulaire régulier, maillage rectangulaire régulier ou maillage aléatoire (fig. 5.2). L'avantage du maillage aléatoire est qu'il permet de modéliser plus précisément la direction de propagation des fissures.



a. Maillage triangulaire

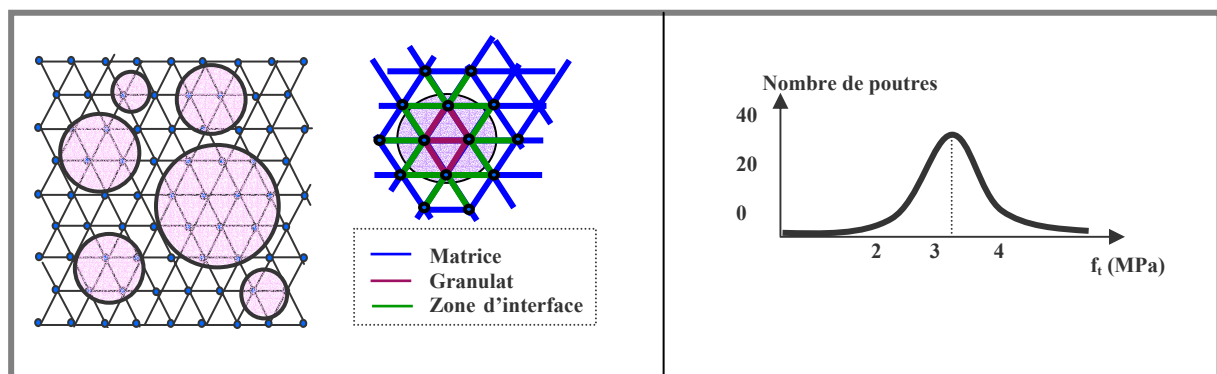
b. Maillage rectangulaire

c. Maillage aléatoire

Figure 5.2 : Types de maillage pour le modèle discret

En ce qui concerne les caractéristiques mécaniques du matériau, nous pouvons modéliser l'hétérogénéité avec différentes méthodes. La première méthode est l'introduction aléatoire des cercles (position et rayon) pour modéliser les granulats dans le béton. Ensuite, il faut identifier les caractéristiques de chaque poutre en fonction de la phase (matrice, granulat ou zone d'interface) qu'elle représente (fig. 5.3a).

La deuxième méthode pour modéliser l'hétérogénéité du matériau est la distribution aléatoire des caractéristiques mécaniques (limite de rupture, module d'élasticité). La distribution Gaussienne (fig. 5.3b) peut être utilisée dans ce cas.



a. Matériau à trois phases

b. Distribution Gaussienne

Figure 5.3 : Modélisation des caractéristiques mécaniques aléatoires du matériau

Comme la théorie des équivalences est valable sous l'hypothèse du comportement élastique linéaire, le critère de rupture pour chaque élément est une rupture fragile (chaque élément poutre travaille dans le domaine élastique linéaire avant la rupture).

5.1.2. Modèles de réseaux de barres

L'équivalence entre l'élément continu (V) et l'élément discret équivalent (V') est obtenue en identifiant l'expression de l'énergie de déformation de l'élément continu $W(\underline{\varepsilon})$ sous l'action d'un champ de déformation macroscopique $\underline{\varepsilon}$ à celle de l'énergie de déformation de l'élément discret équivalent $W'(\underline{\varepsilon})$ sous l'action du même chargement. Cette équivalence énergétique permet de déterminer les caractéristiques élastiques (les raideurs) des différentes barres de l'élément discret équivalent en fonction des données élastiques du milieu continu (E; ν) et de l'aire de l'élément continu considéré.

La densité de l'énergie de déformation U_0 est donnée, d'après la théorie de l'élasticité, par :

$$U_0 = \frac{1}{2} \sum \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + \mu (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2\varepsilon_{23}^2 + 2\varepsilon_{12}^2 + 2\varepsilon_{13}^2) \quad (5.3)$$

où λ , μ sont des coefficients de Lamé :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (5.4)$$

Cas d'un problème en déformation plane : ($\varepsilon_{i3} = 0$)

La densité de l'énergie de déformation s'écrit:

$$U_0^{DP} = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 + \mu (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\varepsilon_{12}^2) = \left(\frac{1}{2} \lambda + \mu \right) (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + \lambda \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 2\mu \varepsilon_{12}^2 \quad (5.5)$$

L'énergie de déformation du volume V est:

$$W^{DP}(E) = V.U_0^{DP} = S.b \left[\left(\frac{1}{2} \lambda + \mu \right) (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + \lambda \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 2\mu \varepsilon_{12}^2 \right] \quad (5.6)$$

Cas d'un problème en contrainte plane : ($\sigma_{i3} = 0$)

La densité de l'énergie de déformation s'écrit:

$$U_0^{CP} = 2\mu \left\{ \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{12}^2 \right\} \quad (5.7)$$

L'énergie de déformation du volume V est:

$$W^{CP}(E) = V.U_0^{CP} = S.b.2\mu \left\{ \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{12}^2 \right\} \quad (5.8)$$

Energie de déformation élastique d'une barre :

$$W'_{barre} = \frac{1}{2} K_b \cdot \varepsilon_b^2 \quad (5.9)$$

Avec $K_b = E_b \cdot l_b \cdot S$ raideur de la barre, $\varepsilon_b = \underline{t} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{t}$ déformation élastique de la barre et \underline{t} vecteur tangent à la barre de norme unitaire.

Maillage triangulaire

Le réseau de barres est généré par une maille élémentaire triangulaire présentant des articulations aux nœuds A, B et C. Ainsi, toutes les barres (AB, BC et CA) travaillent en traction-compression. En outre, pour des raisons de symétrie, elles ont la même longueur notée (l) et le même module d'Young noté E_b . Enfin, toutes les barres ont la même section S . Par conséquent, les barres ont la même raideur ($K_b = E_b \cdot l \cdot S$).

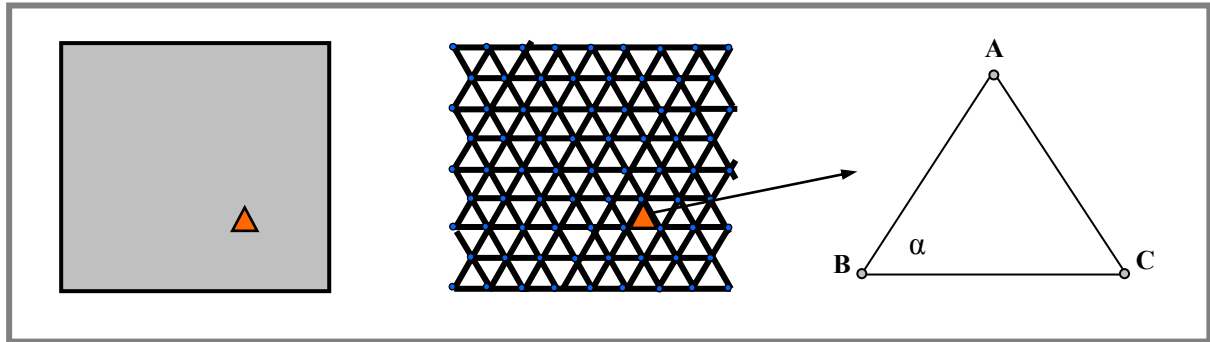


Figure 5.4 : Maillage triangulaire

Pour le problème de déformation plane, le champ de déformation est $\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}$ et les énergies

de déformation élastique des barres sont calculées par les relations suivantes :

$$W'_{AB} = \frac{1}{2} K_b \cdot [\varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha + 2\varepsilon_{12} \sin \alpha \cos \alpha]^2 \quad (5.10)$$

$$W'_{AC} = \frac{1}{2} K_b \cdot [\varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha - 2\varepsilon_{12} \sin \alpha \cos \alpha]^2 \quad (5.11)$$

$$W'_{BC} = \frac{1}{2} K_b \cdot \varepsilon_{11}^2 \quad (5.12)$$

La condition d'équivalence est:

$$W^{DP}(E) = V.U_0^{DP} = W'_{AB} + W'_{AC} + W'_{BC} \quad (5.13)$$

Remplaçons chaque terme par sa valeur à partir des relations (5.6), (5.10), (5.11), (5.12) :

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{2} l^2 . b \left[\left(\frac{1}{2} \lambda + \mu \right) (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + \lambda \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 2 \mu \varepsilon_{12}^2 \right] = \\ & \frac{1}{2} K_b \left[\frac{1}{4} \varepsilon_{11} + \frac{3}{4} \varepsilon_{22} + \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_{12} \right]^2 + \frac{1}{2} K_b \left[\frac{1}{4} \varepsilon_{11} + \frac{3}{4} \varepsilon_{22} - \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_{12} \right]^2 + \frac{1}{2} K_b . \varepsilon_{11}^2 \\ & = \frac{1}{2} K_b \left\{ \frac{1}{8} [\varepsilon_{11} + 3 \varepsilon_{22}]^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{11}^2 \right\} = \frac{1}{2} K_b \left\{ \frac{9}{8} [\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2] + \frac{3}{4} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \frac{3}{2} \varepsilon_{12}^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.14)$$

On trouve :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \lambda + \mu = \frac{9}{8} \frac{K_b}{2V} \\ \lambda = \frac{3}{4} \frac{K_b}{2V} \\ \mu = \frac{3}{4} \frac{K_b}{2V} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_b = \frac{8V\lambda}{3} \\ \lambda = \mu \Leftrightarrow \nu = 0.25 \end{cases} \quad (5.15)$$

Les conditions d'équivalence pour un réseau triangulaire de barres de taille l deviennent :

$$\begin{cases} K_b = \frac{4}{\sqrt{3}} l^2 \lambda \\ \nu = 0.25 \end{cases} \quad (5.16)$$

où :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} = \frac{E}{2.5} \quad (5.17)$$

Comme les barres ne travaillent qu'en traction-compression, le critère de rupture est calculé sur les efforts normaux :

$$\boxed{\frac{N}{S} \leq \sigma_t} \quad (5.18)$$

Pour les simulations numériques, le critère de rupture de chaque élément est distribué aléatoirement. Un élément (barre) est enlevé (rompu) si l'effort normal dans cet élément ne vérifie pas la relation 5.18. Cette vérification doit être réalisée sur l'ensemble des éléments à chaque incrément de temps avant de passer à l'incrément suivant.

5.1.3. Modèles de réseaux de poutres

Chaque poutre peut travailler en traction-compression, flexion, torsion et cisaillement. La matrice de rigidité d'une poutre dans son repère local est calculée par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 & -\frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{ES}{l} & 0 & 0 & \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Supposons que les poutres soient de section rectangulaire de largeur h et épaisseur $b = 1$.

En identifiant les énergies de déformation, nous trouvons les caractéristiques élastiques (Schlangen 1996) de chaque poutre dans un réseau régulier (triangulaire, fig. 5.4) :

$$\nu = \frac{1 - \left(\frac{h}{l}\right)^2}{3 + \left(\frac{h}{l}\right)^2} \quad (5.20)$$

$$E = \frac{E_{mat}}{3} \frac{3 + \frac{h^2}{l^2}}{1 + \frac{h^2}{l^2}} = \frac{2E_{mat}}{3} \cdot \frac{1}{1 - \nu} \quad (5.21)$$

La relation (5.20) donne une condition sur la géométrie des poutres :

$$\boxed{\frac{h}{l} = \sqrt{\frac{1 - 3\nu}{1 + \nu}}} \quad (5.22)$$

Le critère de rupture s'écrit:

$$\sigma_t = \frac{N}{S} + \alpha \cdot \frac{\max(|M_i|, |M_j|)}{bh^2/6} \quad (5.23)$$

5.2. Implantation numérique

Nous avons implanté le modèle du réseau de poutres dans le code de calcul éléments finis CESAR-LCPC dont nous avons accès aux sources. Une présentation générale de ce logiciel et l'implantation du modèle du réseau de poutres fera l'objet de cette section.

5.2.1. Présentation générale du code de calcul CESAR-LCPC

Le logiciel de calcul CESAR-LCPC, programmé dans le langage FORTRAN 77, est doté d'une structure souple et modulaire. Il se compose de plusieurs modules dédiés chacun à un problème de mécanique spécifique. La communication et l'échange d'informations entre, d'une part les modules et d'autre part la racine principale de CESAR sont assurés par des outils appartenant à la bibliothèque générale du code. Chaque module doit être conçu de telle sorte qu'il soit à la fois autonome et compatible avec l'environnement CESAR-LCPC. L'accès au module proprement dit se fait grâce à deux routines appelées *bloc* et *exécuteur*.

La version « recherche » de CESAR-LCPC se compose de trois parties (fig. 5.5) :

- Pré-processeur (MAX);
- Solveur (CESAR);
- Post-processeur (PEGGY).

L'architecture du solveur CESAR repose sur les entités suivantes:

- L'ossature (programme principal, aiguillages, gestions de configuration, etc.);
- Les modules dits « de gestion de données »;
- Les modules dits « d'exécution » ;
- Les familles d'éléments finis.

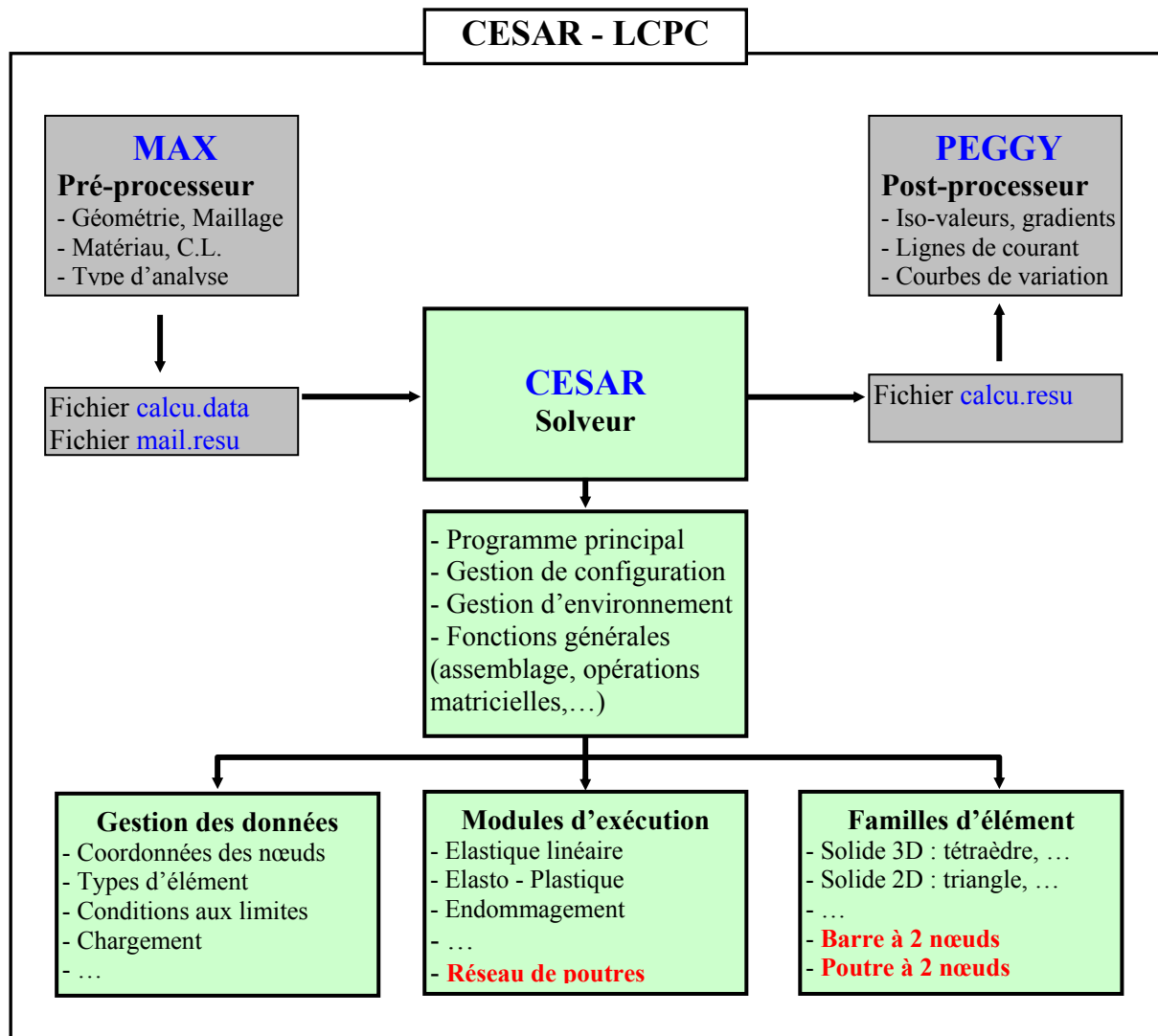


Figure 5.5 : Architecture du code de calcul CESAR-LCPC

5.2.2. Algorithme pour le cas de chargements statiques

Dans notre modèle de réseau de poutres, chaque élément du réseau a un comportement élastique fragile. Afin de modéliser l'hétérogénéité du matériau béton, nous distribuons aléatoirement le critère de rupture sur chaque élément poutre. Une fois cette étape faite, le problème devient complètement déterministe et la simulation de la propagation des fissures devient conceptuellement très simple. En effet, il s'agit de faire des calculs élastiques sur ce réseau de poutres, d'enlever les poutres pour lesquelles le critère de rupture est atteint et de répéter l'opération jusqu'à la ruine complète du réseau. Ainsi, le calcul comporte les étapes suivantes :

Etape 1 : La première étape à faire est le maillage (réseau de poutres) et les données initiales (matériaux, chargement, conditions aux limites). Cette étape est réalisée par le pré-processeur MAX qui fournit un fichier de maillage « mail.resu » et un fichier des données d'entrée « calcul.data ».

Etape 2 : Distribution aléatoire du critère de rupture sur les poutres du réseau. Nous utilisons la loi normale (distribution gaussienne), $N(\mu, \sigma^2)$, où μ est l'espérance et σ est l'écart type. Ces deux paramètres sont des données d'entrée que nous devons introduire dans le fichier « calcul.data ».

Etape 3 : Nous imposons un chargement initial par le paramètre de chargement Δ (force ou déplacement). Nous résolvons le problème élastique pour ce chargement initial après l'assemblage de la matrice de rigidité globale du réseau. Cette résolution revient à trouver les déplacements aux nœuds du réseau et donc à résoudre le système linéaire suivant :

$$\{U_0\} = [K_0]^{-1} \cdot \{F_0\}$$

où $[K_0]$ est la matrice de rigidité globale du réseau à l'état initial, $\{U_0\}$ est le vecteur des déplacements nodaux, $\{F_0\}$ est le vecteur des forces généralisées.

Etape 4 : Nous testons le critère de rupture sur toutes les poutres du réseau. Ensuite, nous enlevons les poutres cassées en leur attribuant une raideur presque nulle (10^{-8}).

Etape 5 : Nous incrémentons le chargement Δ et nous reconduisons la résolution du problème élastique (système linéaire) après assemblage de la nouvelle matrice de rigidité. Nous testons de nouveau le critère de rupture pour toutes les poutres et nous enlevons les poutres rompues.

Etape 6 : Nous répétons l'étape 5 jusqu'à la rupture complète du réseau de poutres.

Pour chaque itération i correspondant à un pas de chargement Δ_i , nous déterminons la force et le déplacement. Afin de préparer l’affichage de la propagation des fissures, nous enregistrons le numéro des poutres rompues à chaque pas de chargement. Le post-traitement des résultats est réalisé avec le logiciel MATLAB.

Pour implanter le modèle du réseau de poutres, nous créons un nouveau module d’exécution dans CESAR. Pour cela, différentes routines sont développées dans le langage FORTRAN 77.

- BLLATI : Dimensionnement des tableaux et lecture préliminaire
- EXLATI : Module d’exécution du bloc
- DISTLA : Distribution aléatoire des caractéristiques
- ASLTC : Calcul et assemblage d’une matrice globale
- REACC : Calcul et assemblage des réactions
- CONTRS1 : Calcul des résultats complémentaires
- CRIRUP : Test du critère de rupture
- FAMI07 : Élément barre (version modifiée pour modèle de type réseau)
- FAMI03 : Élément poutre (version modifiée pour modèle de type réseau)

Méthode pour générer une distribution aléatoire

Pour simuler la loi Gaussienne, nous pouvons utiliser la méthode de Box-Muller.

Si X , Y sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $]0,1[$, on démontre assez aisément que les variables aléatoires suivantes suivent toutes deux la loi normale centrée réduite :

$$T_1 = \sqrt{-2 \ln X} \cdot \cos(2\pi Y) \quad (5.24)$$

$$T_2 = \sqrt{-2 \ln X} \cdot \sin(2\pi Y) \quad (5.25)$$

La variable $A = \mu + \sigma \cdot T_1$ suit donc une loi normale $N(\mu, \sigma)$.

Dans la bibliothèque de FORTRAN, il existe déjà une fonction, « RANDOM », qui permet de générer une variable aléatoire de loi uniforme. Nous pouvons donc utiliser la méthode ci-dessus pour générer facilement des variables aléatoires suivant une loi normale.

Nous pouvons schématiser l'algorithme du modèle de type réseau de poutres sous chargement statique ci-dessous (fig. 5.6):

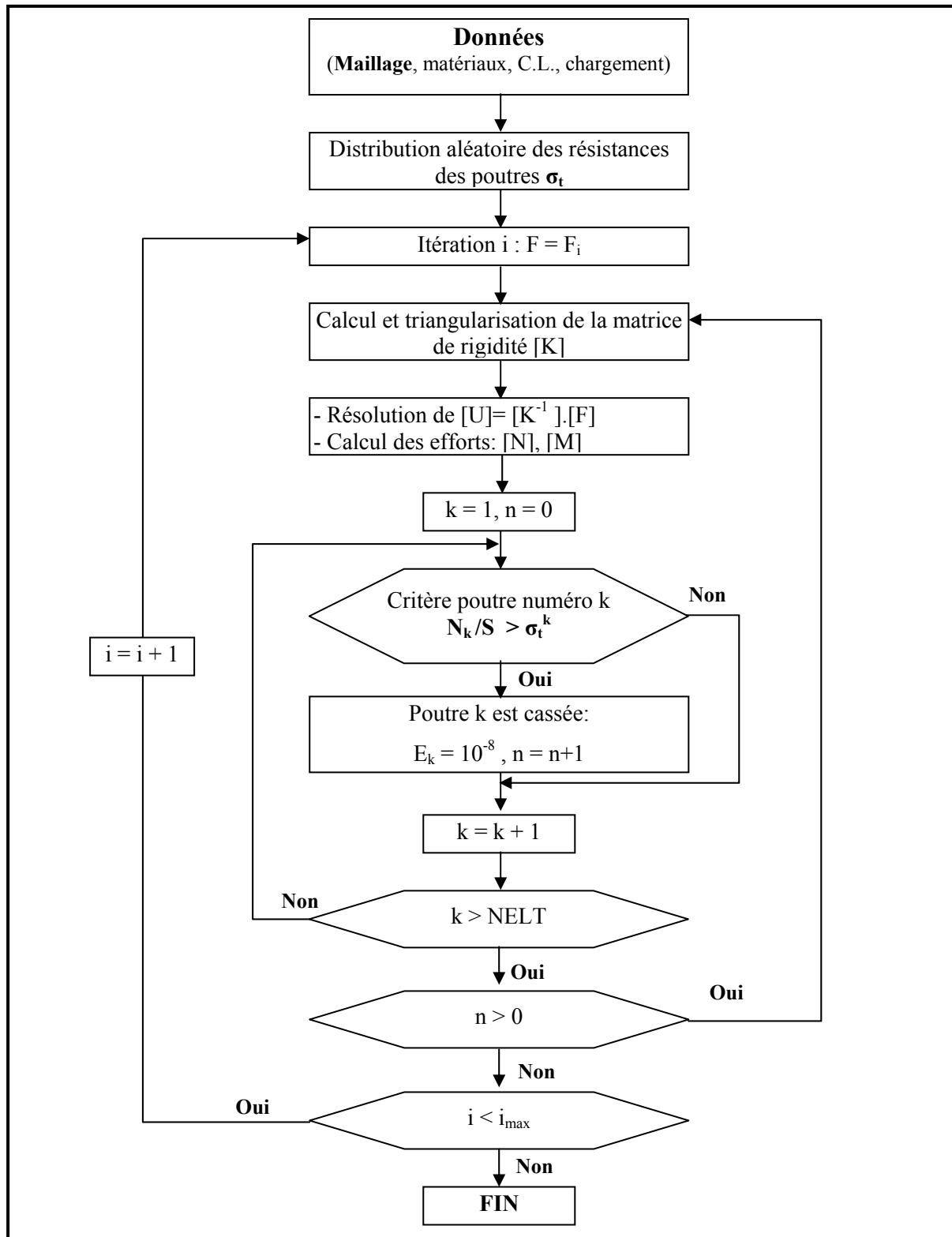


Figure 5.6 : Algorithme du modèle de type réseau pour le chargement statique

5.2.3. Algorithme pour le cas de chargement en fatigue

Le comportement typique du béton sous chargement cyclique est caractérisé par une dégradation progressive de la rigidité du matériau. Comme nous l'avons déjà invoqué dans les parties précédentes, le comportement adoucissement mésoscopique du béton sous chargement cyclique est causé par la propagation et la coalescence des micro-fissures. Cela veut dire que les propriétés mécaniques du béton sont dégradées graduellement et localement sous chargement cyclique.

Dans notre modèle de réseau, nous considérons que le béton est endommagé si et seulement si il est en traction. L'endommagement est isotrope et il est caractérisé par un paramètre scalaire $D = D(N, \varepsilon)$, où N est le nombre de cycle de chargement, ε est la déformation actuelle. Le module d'élasticité du matériau est donné par :

$$E = (1-D).E_0 \quad (5.26)$$

Où E_0 est le module d'élasticité initial du matériau sain.

La différence entre le problème statique et le problème de fatigue vient du fait que :

- En chargement statique, la charge augmente progressivement, alors que le module d'élasticité de chaque élément poutre reste constant. Le nombre de poutres rompues augmente à cause de l'augmentation du chargement.
- En chargement cyclique, l'amplitude du chargement est constante, alors que le module d'élasticité de chaque poutre diminue après chaque cycle de chargement. Le nombre de poutres rompues augmente à cause de l'augmentation du nombre de cycles de chargement.

Pour calculer l'évolution de l'endommagement sous chargement cyclique, nous pouvons aussi utiliser le modèle de Guo :

$$D = D_1 \left(\frac{N_i}{N_f} \right) D_2(\varepsilon_i) \quad (5.27)$$

avec :

$$D_1 \left(\frac{N_i}{N_f} \right) = \begin{cases} \left(\frac{N_i}{N_f} \right)^c & \text{si } S \leq 0.75 \\ \frac{N_i}{N_f} & \text{si } S > 0.75 \end{cases} \quad \begin{matrix} S \text{ est le niveau de chargement} \end{matrix} \quad (5.28)$$

$$D_2(\varepsilon_i) = \alpha \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_t} \quad (5.29)$$

Remarque : Nous pouvons aussi utiliser le modèle de Paas pour calculer l'évolution de l'endommagement par fatigue du béton :

$$\frac{\partial D}{\partial N} = C.D^\alpha . \frac{(\Delta \varepsilon)^{\beta+1}}{\beta+1} \Leftrightarrow D_i = \left(N_i . C . (1-\alpha) . \frac{(\Delta \varepsilon)^{\beta+1}}{\beta+1} \right)^{1/(1-\alpha)} \quad (5.30)$$

Cependant, à cause des contraintes de temps, ce modèle n'a pas été traité dans notre travail. Son utilisation constitue une perspective possible.

Un calcul de fatigue comporte les étapes suivantes :

Etape 1 : Construire le maillage (réseau de poutres) et entrer les données du problème (matériaux, chargement, conditions aux limites).

Etape 2 : Distribuer aléatoirement (loi normale) le critère de rupture sur les poutres du réseau.

Etape 3 : Imposer un chargement initial par le paramètre de chargement Δ . Résoudre le problème élastique pour ce chargement initial après l'assemblage de la matrice de rigidité globale du réseau. Cette résolution revient à trouver les déplacements aux nœuds du réseau et donc à résoudre le système linéaire $\{U_0\} = [K_0]^{-1} . \{F_0\}$ ($[K_0]$ est la matrice de rigidité globale du réseau à l'état initial, $\{U_0\}$ est le vecteur des déplacements nodaux, $\{F_0\}$ est le vecteur des forces généralisées).

Etape 4 : Tester le critère de rupture sur toutes les poutres du réseau. Puis, enlever les poutres cassées en leur attribuant une raideur presque nulle (10^{-8}).

Etape 5 : Incrémenter le chargement Δ et résoudre à nouveau le problème élastique (système linéaire) après assemblage de la nouvelle matrice de rigidité. Tester ensuite le critère de rupture pour toutes les poutres et enlever les poutres rompues.

Etape 6 : Répéter l'étape 5 jusqu'à la valeur maximale imposée.

Etape 7 : Mettre à jour le paramètre d'endommagement.

Etape 8 : Refaire les étapes de 3 à 7 pour le nouveau cycle de chargement.

Nous pouvons schématiser l'algorithme du modèle de type réseau des poutres sous chargement en fatigue à l'aide du tableau de la figure 5.7:

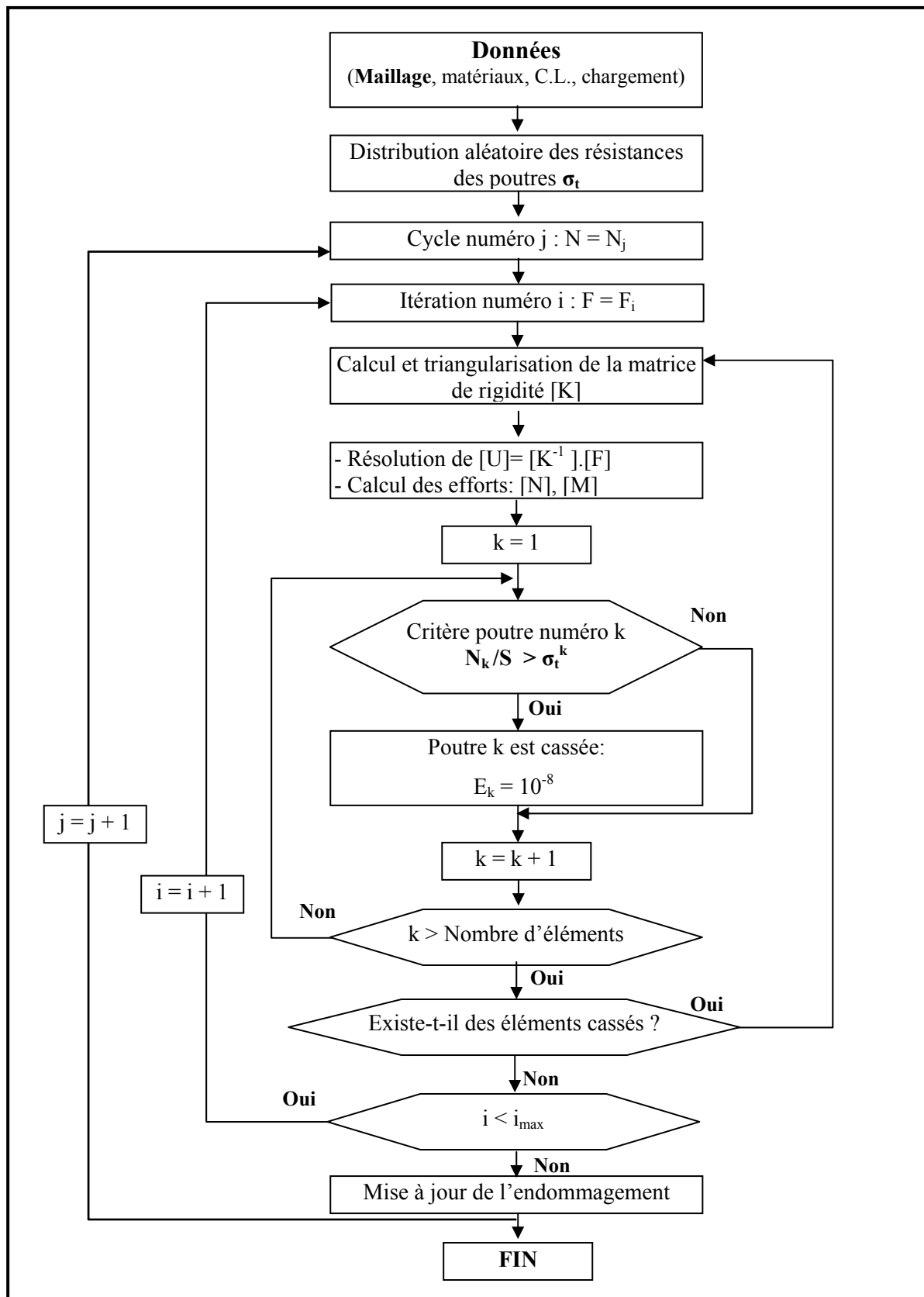


Figure 5.7 : Algorithme du modèle de type réseau pour le chargement en fatigue

5.3. Propagation des fissures sous chargement statique

Nous présentons dans cette section quelques exemples de propagation de fissures dans les structures simples en béton en mettant en application le modèle de réseau de poutres. A des fins de validations, nous commençons d'abord par des calculs en statique.

5.3.1. Flexion trois points symétrique

Nous considérons en premier lieu un essai de flexion trois points symétrique que nous traitons à l'aide du modèle de réseau de poutres (fig. 5.8a).

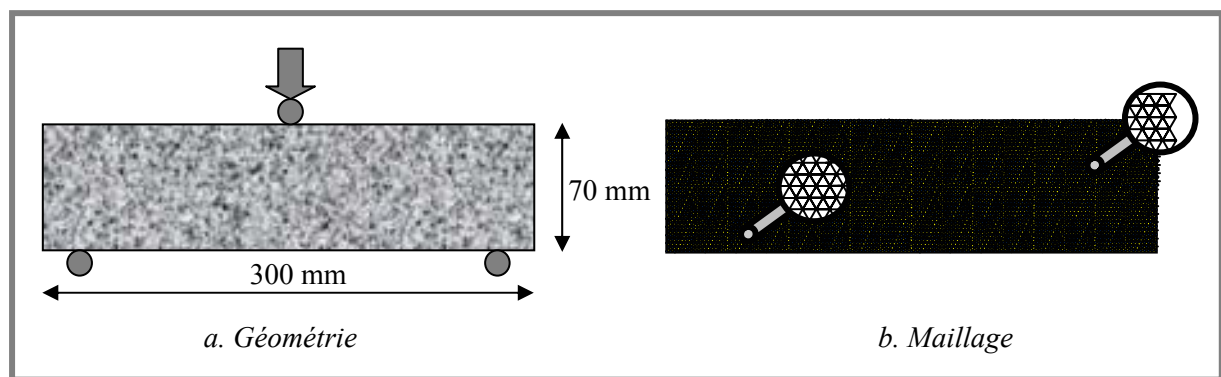


Figure 5.8 : Flexion trois points symétrique

Le maillage se compose de poutres de tailles identiques (maillage triangulaire, fig. 5.8b). Afin d'étudier l'influence de la taille des éléments (poutres), nous considérons quatre maillages avec quatre tailles d'éléments : 0.5mm, 1.0mm, 1.5mm, et 2.0mm.

Maillage	Taille d'élément (mm)	Nombre de noeuds	Nombre d'éléments
1	$l = 2.0 \text{ mm}$	6171	18130
2	$l = 1.5 \text{ mm}$	11028	32573
3	$l = 1.0 \text{ mm}$	23740	70461
4	$l = 0.5 \text{ mm}$	97882	292119

Tableau 5.1 : Caractéristique des maillages

La limite de rupture des éléments (poutres) est attribuée aléatoirement suivant la loi normale (avec une valeur moyenne de 2.5 MPa et un écart – type de 0.5 MPa). Une dizaine de calculs sont réalisés pour chaque maillage et les résultats sont moyennés sur tous ces calculs. Nous présentons d'abord la courbe typique « force – déplacement » obtenue numériquement (figure 5.9).

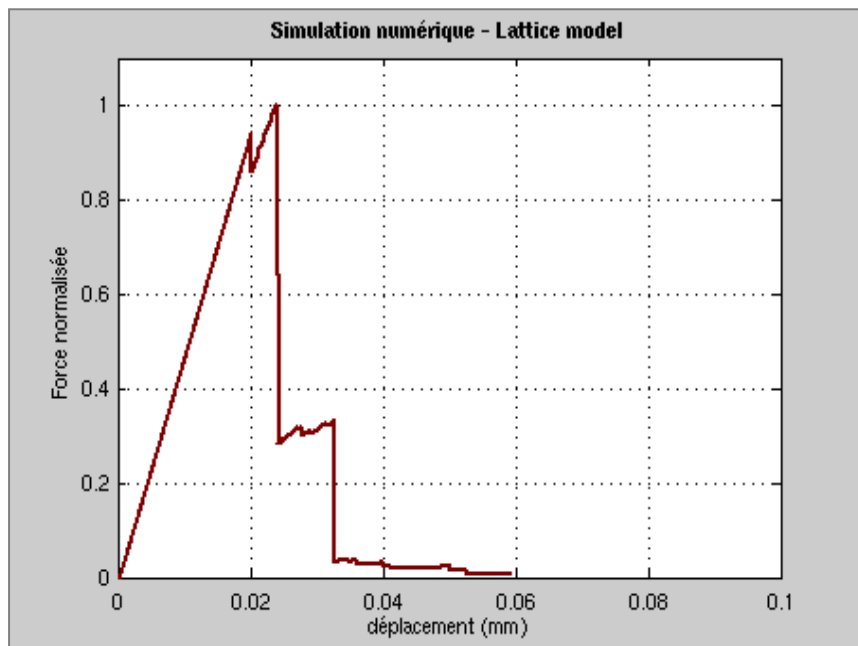


Figure 5.9 : Courbe force – déplacement obtenue par le modèle de réseau de poutres

Nous observons une rupture plus fragile en utilisant le modèle de réseau de poutres par rapport aux résultats d'essais (fig. 5.10). Cette fragilité est liée à la fois au critère de rupture des éléments « poutres » et à la modélisation en 2D.

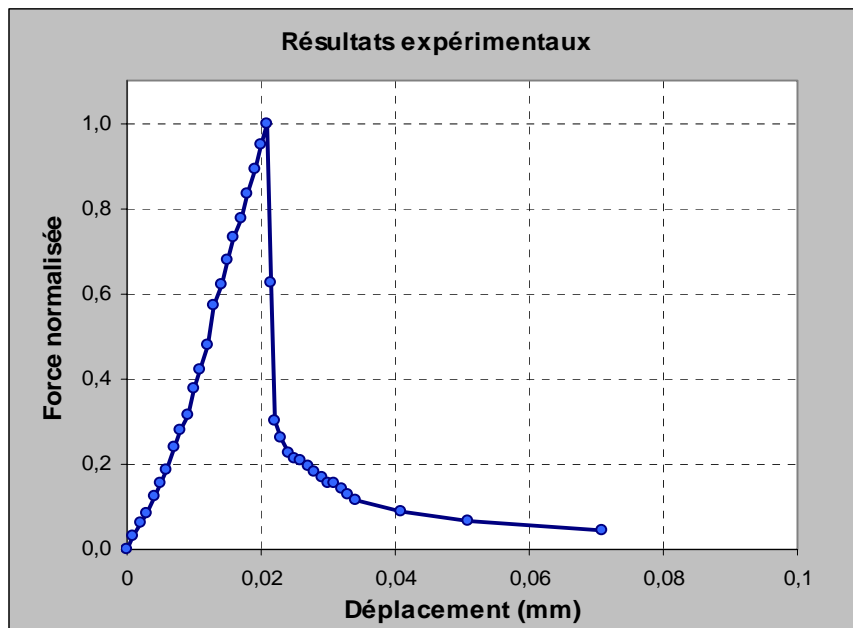


Figure 5.10 : Courbe expérimentale force – déplacement

Pour étudier l'influence du maillage, nous pouvons aussi tracer une courbe représentant la force moyenne de rupture en fonction du nombre d'éléments (fig. 5.11).

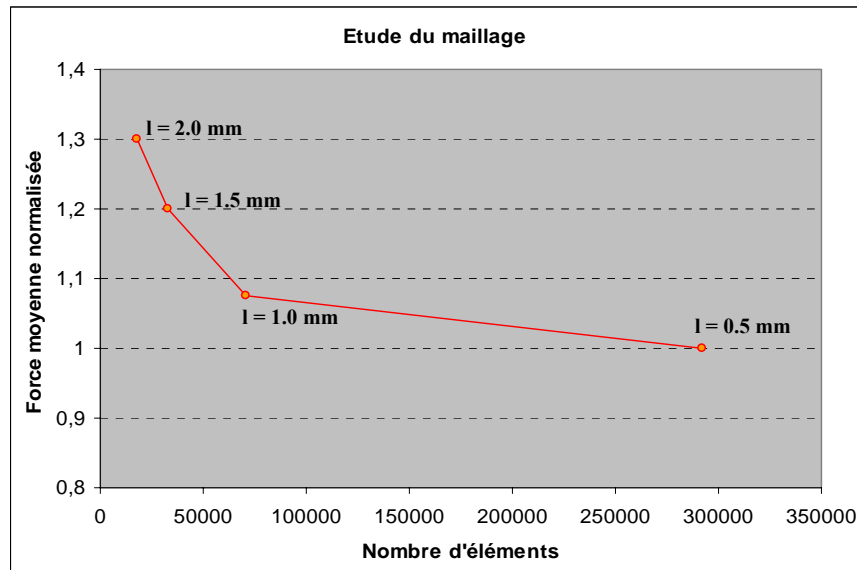


Figure 5.11 : Etude du maillage

Nous observons une diminution de la force de rupture quand nous diminuons la taille des éléments. Le maillage avec les éléments de taille $l = 1\text{ mm}$ est assez représentatif pour modéliser l'allure des fissures dans cet exemple de flexion trois points. Il semble être un bon compromis en termes du temps de calcul et de validité du résultat. En effet, un calcul avec le maillage $l = 0.5\text{ mm}$ peut durer plus de 10h (Processeur Core2 Duo, 1.8 GHz, 2 Go de RAM). C'est la raison pour laquelle le maillage $l = 1\text{ mm}$ est utilisé pour comparer l'allure des fissures entre un matériau homogène et un matériau aléatoire (fig. 5.12). Nous obtenons une fissure symétrique dans le cas du matériau homogène. Par contre, les fissures se propagent aléatoirement vers le haut dans le matériau aléatoire.

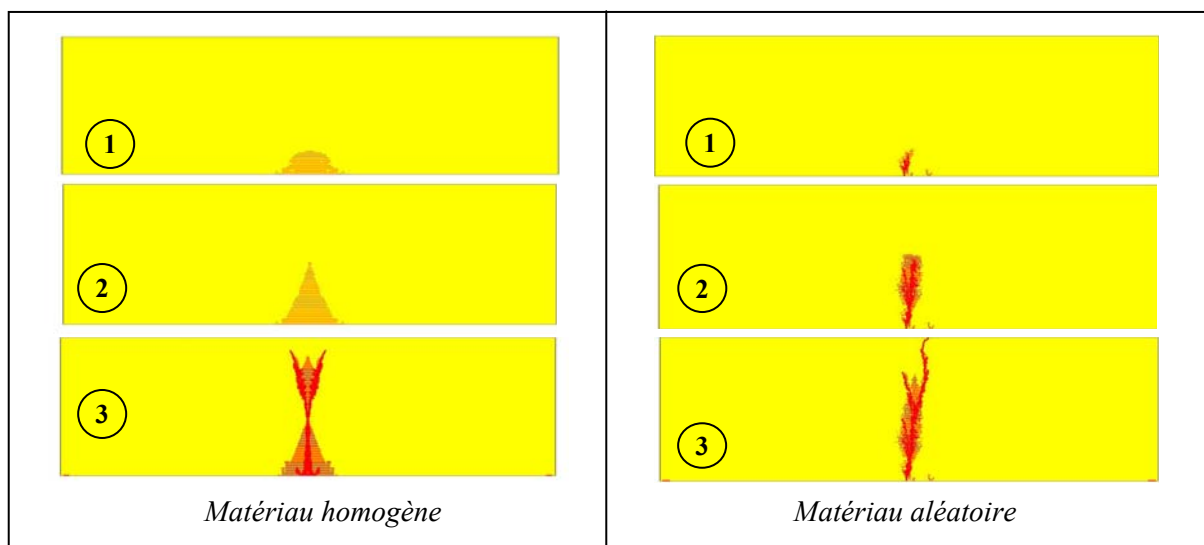


Figure 5.12 : Propagation des fissures en flexion trois points

Chaque simulation numérique donne comme attendu des trajets de fissuration différents dans la zone centrale de l'éprouvette. Nous présentons dans la figure 5.13 quelques résultats de comparaison entre les essais (chapitre 4) et les simulations numériques (obtenues par le modèle de réseau de poutres) pour valider le fait que les trajets expérimentaux et numériques sont comparables.

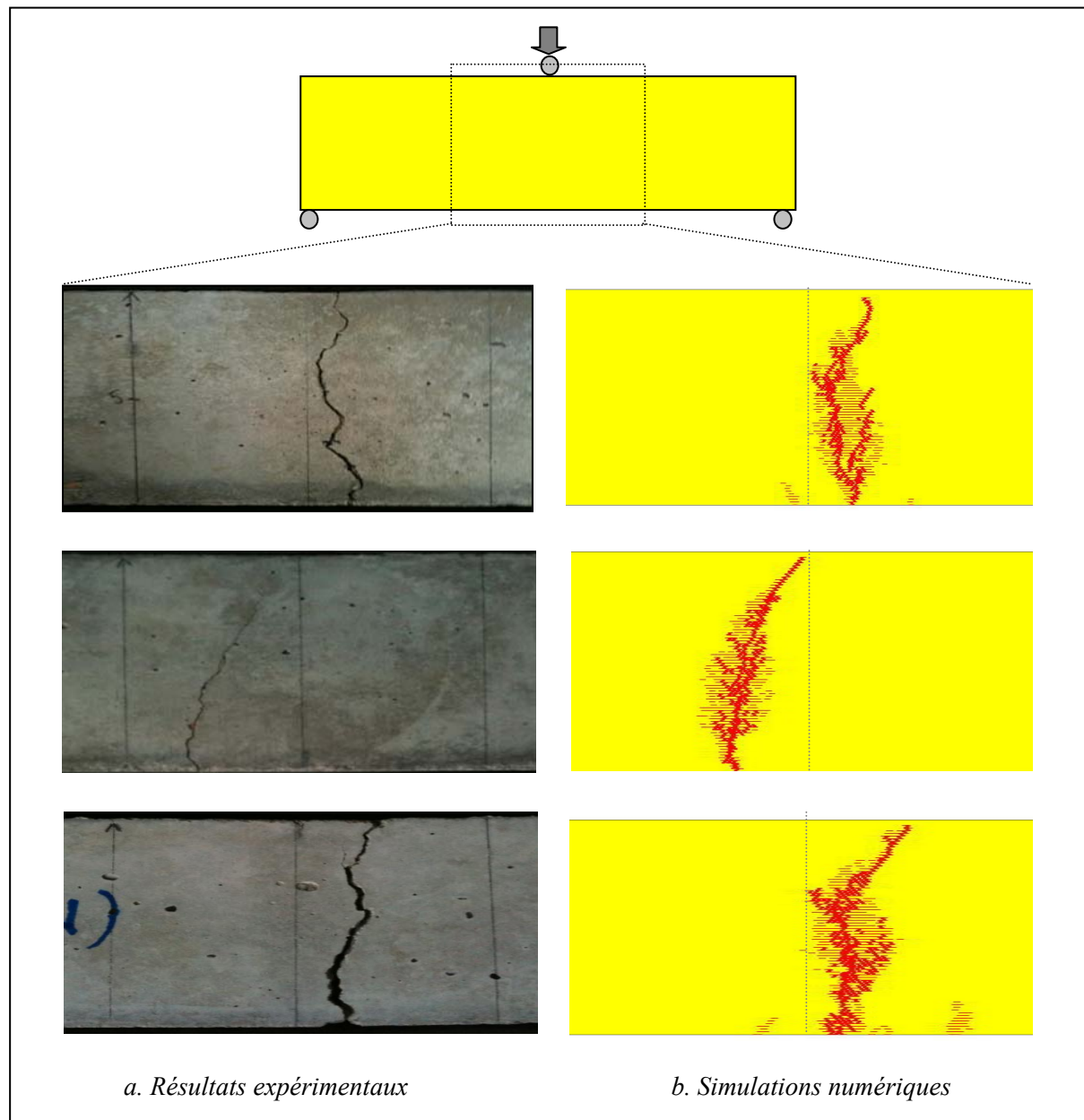


Figure 5.13 : Comparaison des trajets de fissures obtenus pour des essais et des simulations

Les simulations numériques reproduisent bien les allures aléatoires des fissures par flexion trois points. Ces résultats constituent une première étape de validation de notre modèle de réseau de poutres.

5.3.2. Flexion trois points dissymétrique

Nous simulons ensuite un essai de flexion trois points dissymétrique (ou cisaillement) avec le modèle de type réseau de poutres (fig. 5.14). Des essais de ce type ont notamment été réalisés par Schlangen.

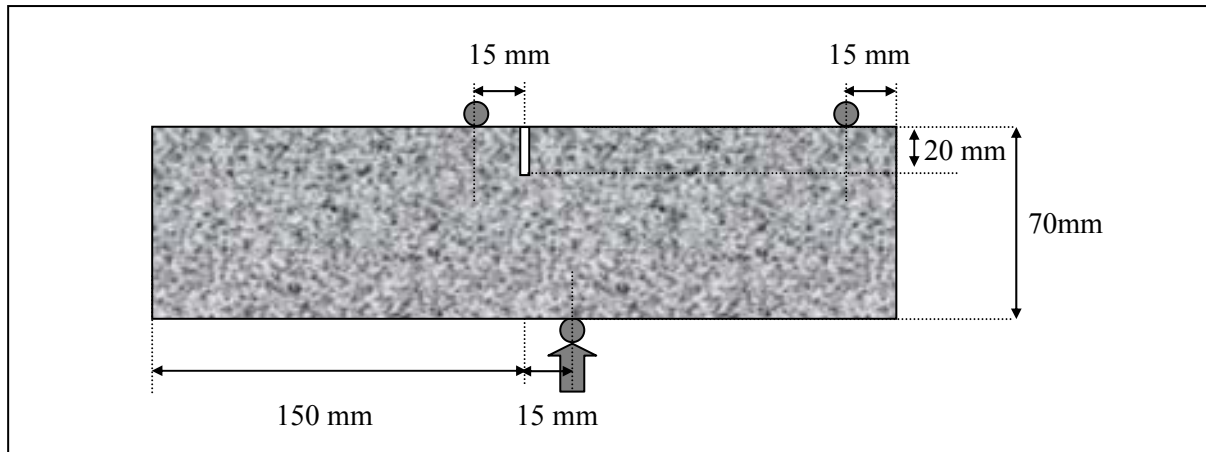


Figure 5.14 : Flexion dissymétrique – éprouvette entaillée

L'éprouvette est entaillée au milieu. Le chargement est contrôlé en déplacement. Les calculs numériques sont en 2D. Le maillage est triangulaire avec des éléments de taille identique.

Les caractéristiques du problème sont données dans le tableau 5.2 :

E (MPa)	ν	Taille d'élément (mm)	Nombre de nœuds	Nombre d'éléments
35000	0.2	0.5	97882	292119

Tableau 5.2 : Caractéristiques du problème de flexion dissymétrique

Concernant la limite de rupture des éléments (poutres), nous utilisons toujours la distribution aléatoire de loi normale avec une valeur moyenne de 2.5 MPa et un écart – type de 0.5 MPa.

En faisant différents calculs (avec différentes distributions aléatoires), nous observons toujours le même scénario de fissuration. Les résultats d'une des simulations numériques sont donnés dans la figure 5.15. La fissure commence au fond d'entaille. Puis, elle se propage vers le point d'appui de la force.

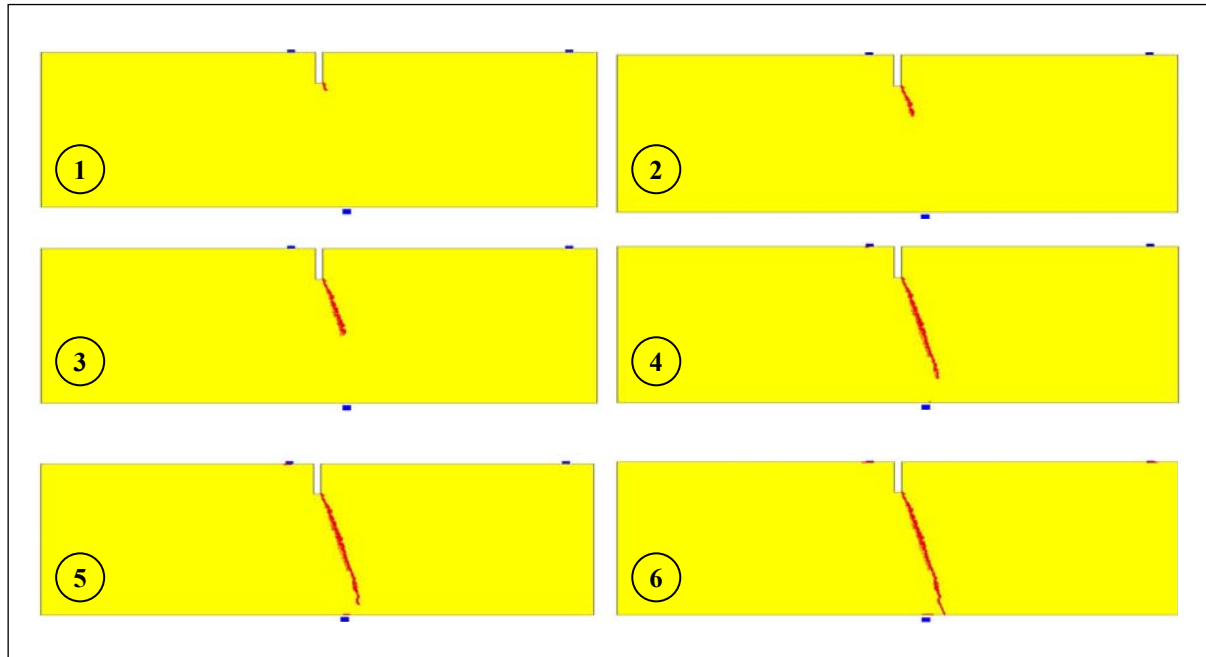


Figure 5.15 : Propagation des fissures

Ces résultats numériques sont très cohérents avec les résultats d'essais de Schlangen (fig. 5.16).

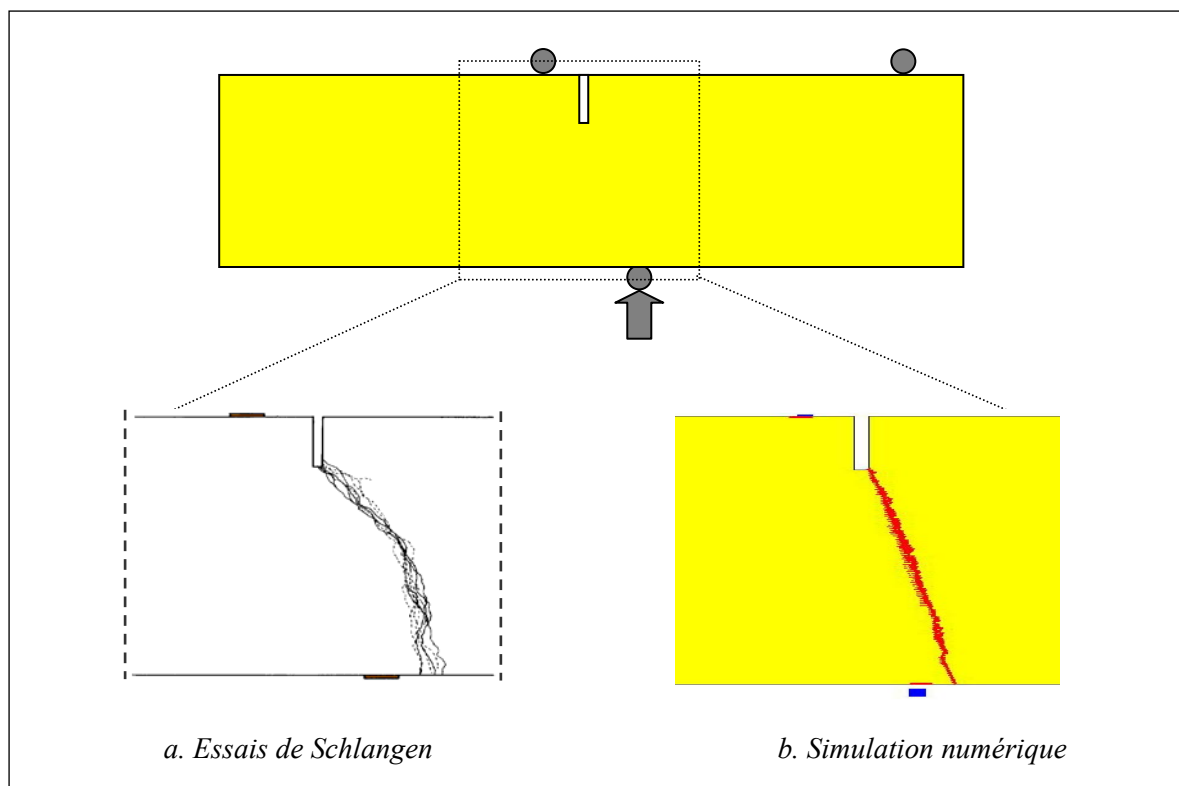


Figure 5.16 : Résultats expérimentaux (Schlangen 1993)

5.3.3. Flexion quatre points d'une poutre en béton armé

Nous pouvons aussi utiliser le modèle de réseau de poutres pour modéliser les fissures dans les structures en béton armé. Nous simulons dans cette section un essai de flexion quatre points d'une poutre en béton armé (fig. 5.16a).

Les données du problème sont : matériau béton ($E = 35000\text{MPa}$, $\nu = 0.2$), armature en acier ($E = 210000\text{MPa}$, $\nu = 0.3$), maillage triangulaire avec les éléments de taille identique $l = 0.5\text{ mm}$, critère de rupture aléatoire (avec une moyenne de 2.5 MPa , et un écart – type de 0.5 MPa).

Les simulations numériques montrent un réseau de fissures qui s'initie sur la face inférieure de la poutre (fig. 5.16b). Ces fissures se propagent vers le haut et traversent l'armature en laissant quelques micro-fissures longitudinales à l'interface armature - béton. Ces résultats numériques sont en conformité avec les résultats expérimentaux obtenus pour ce type d'essai (fig. 5.16c).

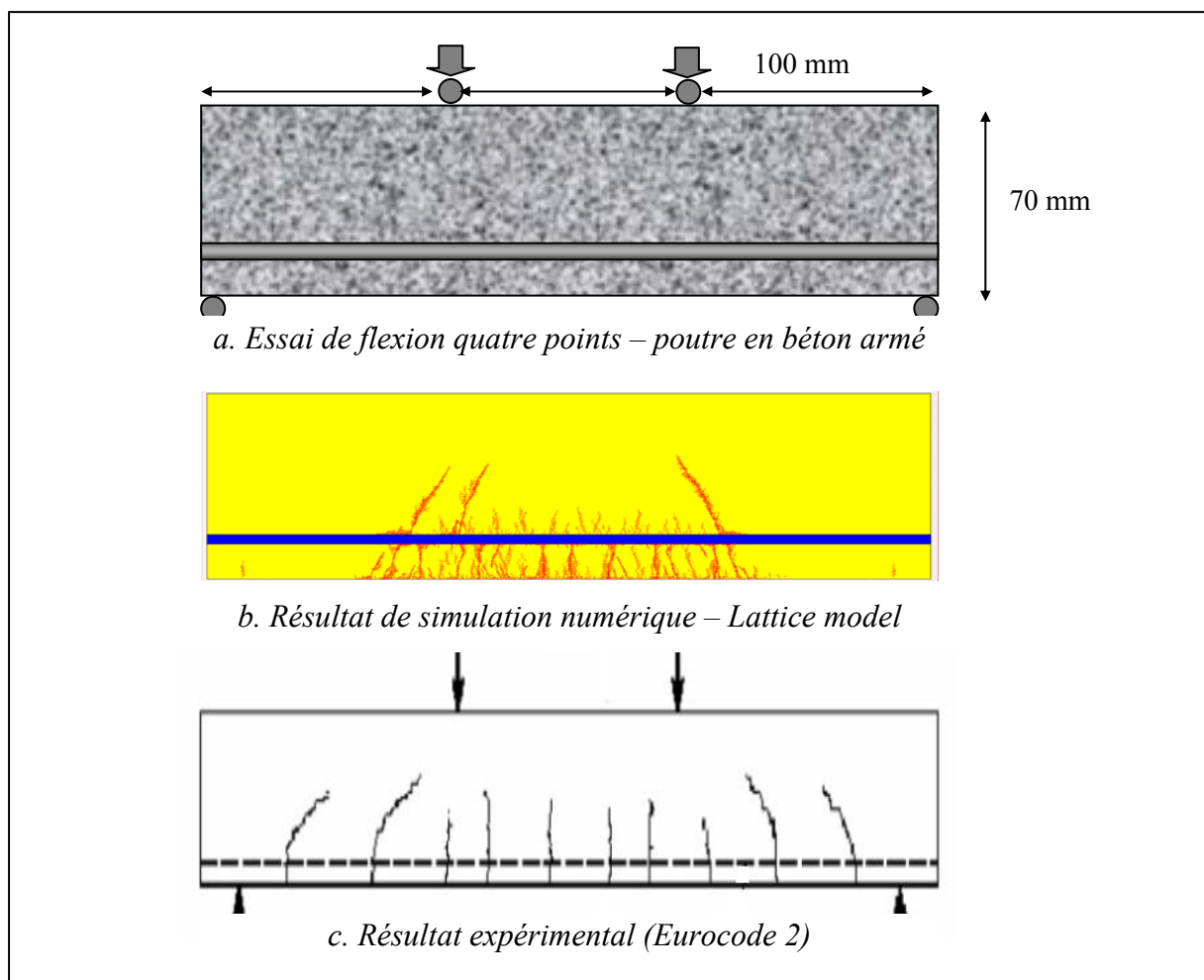


Figure 5.16 : Essai de flexion quatre points sur une poutre en béton armé

5.3.4. Cisaillement

Dans cette section nous étudions la fissuration d'une plaque entaillée en béton sous chargement de cisaillement (fig. 5.17a). Dans cet exemple, la partie basse de la plaque est encastrée, tandis que la partie haute de la plaque est soumise à un chargement transversal.

Les données du problème sont les mêmes que pour les cas précédents : matériau béton ($E = 35000\text{MPa}$, $\nu = 0.2$), taille d'élément $l = 0.5\text{ mm}$, critère de rupture aléatoire (avec une moyenne de 2.5 MPa , et un écart – type de 0.5 MPa). Les simulations numériques montrent toujours deux fissures qui démarrent en fond d'entailles et qui se propagent aléatoirement selon des chemins obliques (fig. 5.17b). Nos résultats numériques sont conformes aux résultats expérimentaux de Nooru-Mohamed (fig. 5.17c).

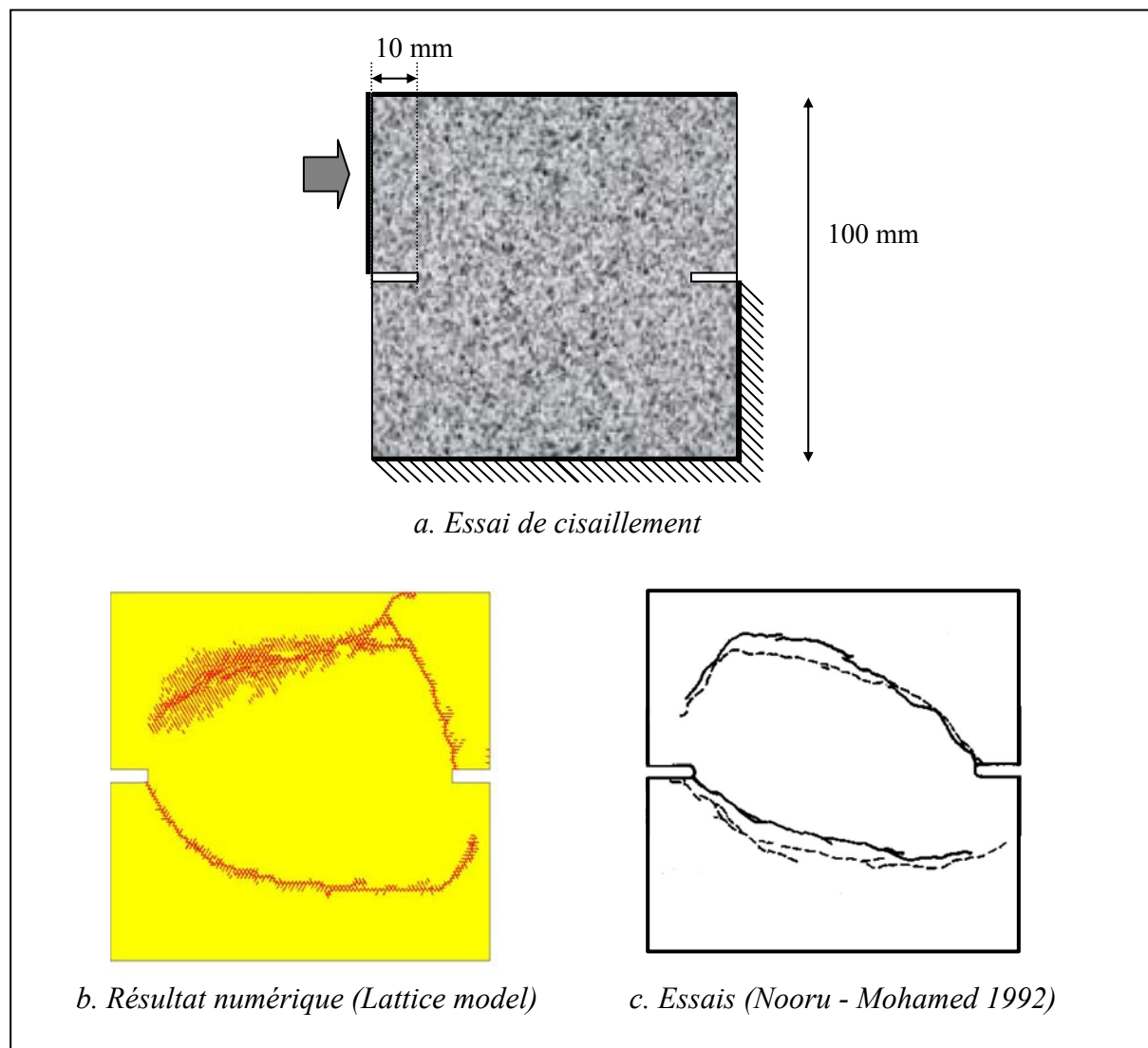


Figure 5.17 : Rupture par cisaillement

5.3.5. Traction dissymétrique

Le dernier cas (en statique) traité concerne l'essai de traction directe sur une plaque entaillée dissymétrique (fig. 5.18a).

Les données du problème sont identiques à celle des cas traités précédemment : matériau béton ($E = 35000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.2$), taille d'élément $l = 0.5 \text{ mm}$, critère de rupture aléatoire (avec une moyenne de 2.5 MPa , et un écart – type de 0.5 MPa). Les simulations numériques montrent l'apparition d'une fissure en fond d'entaille qui se propage horizontalement (fig. 5.18b). Ces résultats numériques sont cohérents avec les résultats d'essais de Van Mier (fig. 5.18c).

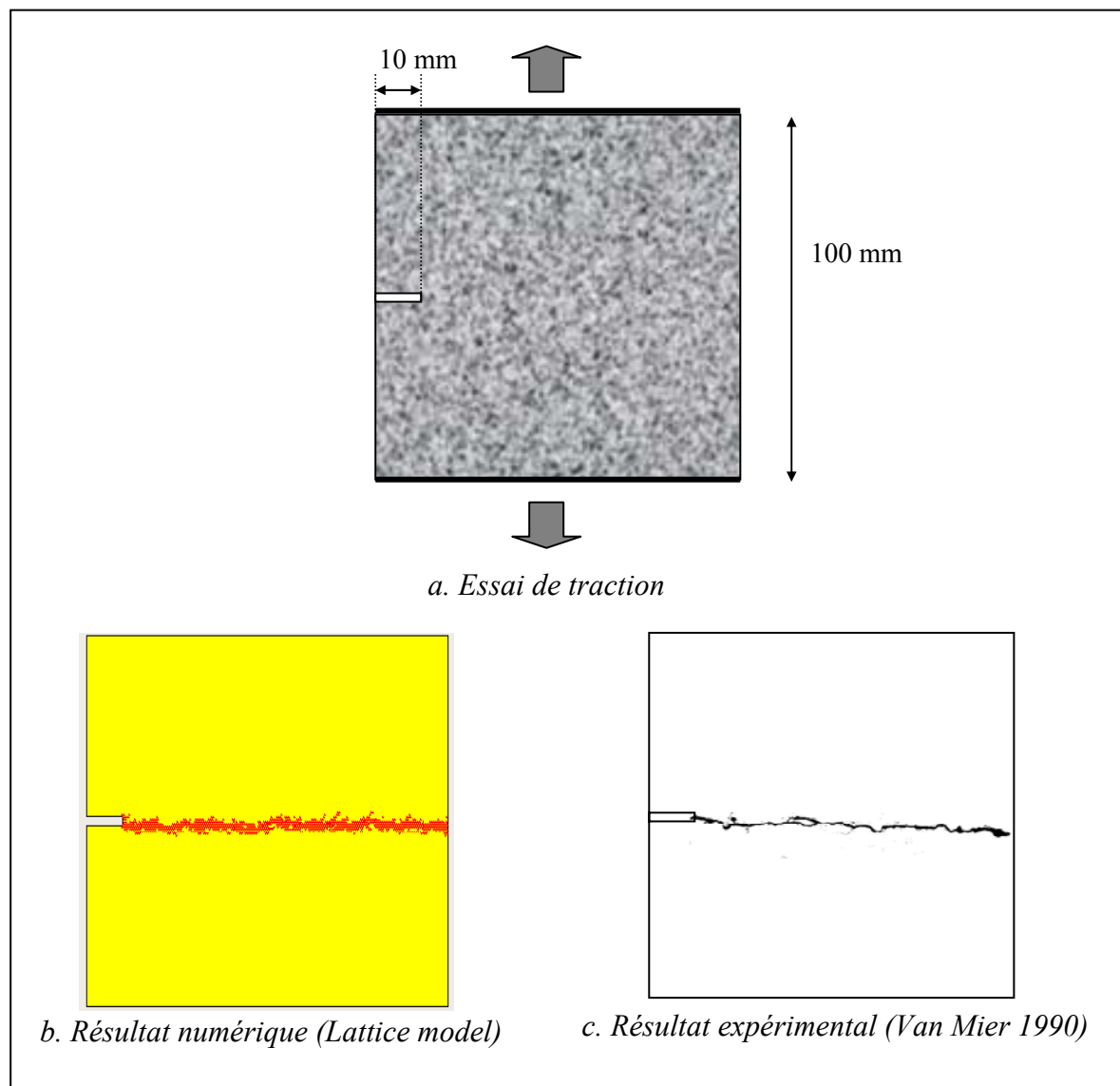


Figure 5.18 : Traction sur éprouvette entaillée dissymétrique

5.4. Propagation des fissures par fatigue

Nous pouvons maintenant passer à l'étude de la fissuration par fatigue des structures en béton. Pour cela, nous utilisons notre modèle de réseau de poutres couplé à un modèle d'endommagement.

Nous étudions dans cette section la fatigue du béton en flexion trois points (fig. 5.19). Pour cette étude, le maillage reste triangulaire avec la taille des éléments $l = 0.5 \text{ mm}$. Le chargement consiste maintenant en une force imposée pour le problème de fatigue. Les paramètres du matériau béton sont : $E = 35000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.2$.

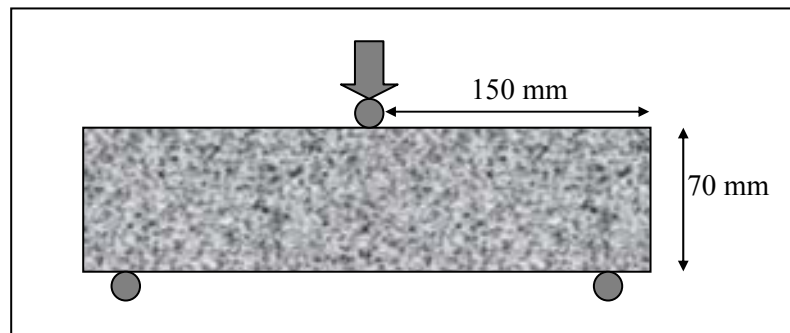


Figure 5.19 : Flexion trois points

Nous simulons tout d'abord la fissuration dans un matériau homogène. La courbe force – déplacement sous chargement cyclique est présentée dans la figure 5.20. Nous retrouvons bien le comportement classique des poutres en béton sous chargement de fatigue.

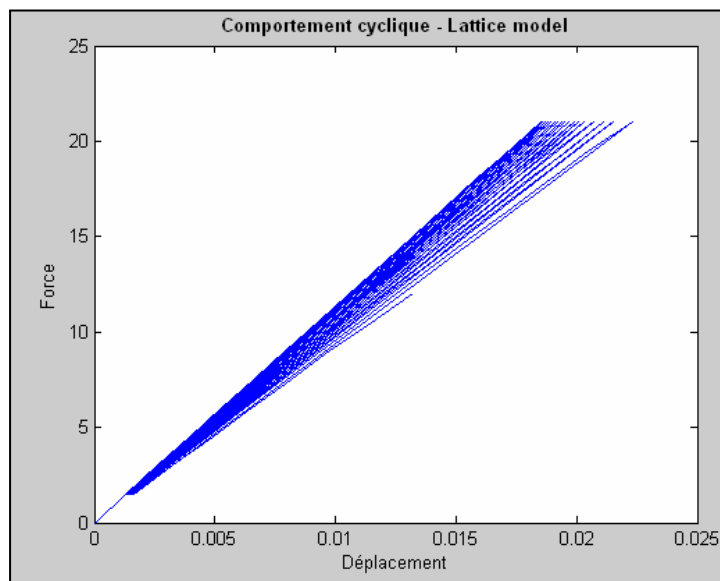


Figure 5.20 : Courbe force – déplacement sous chargement cyclique – lattice model

La figure 5.21 donne la propagation des fissures en fonction du nombre de cycles de chargement. L'allure des fissures sous chargement cyclique est équivalente à celle sous chargement statique.

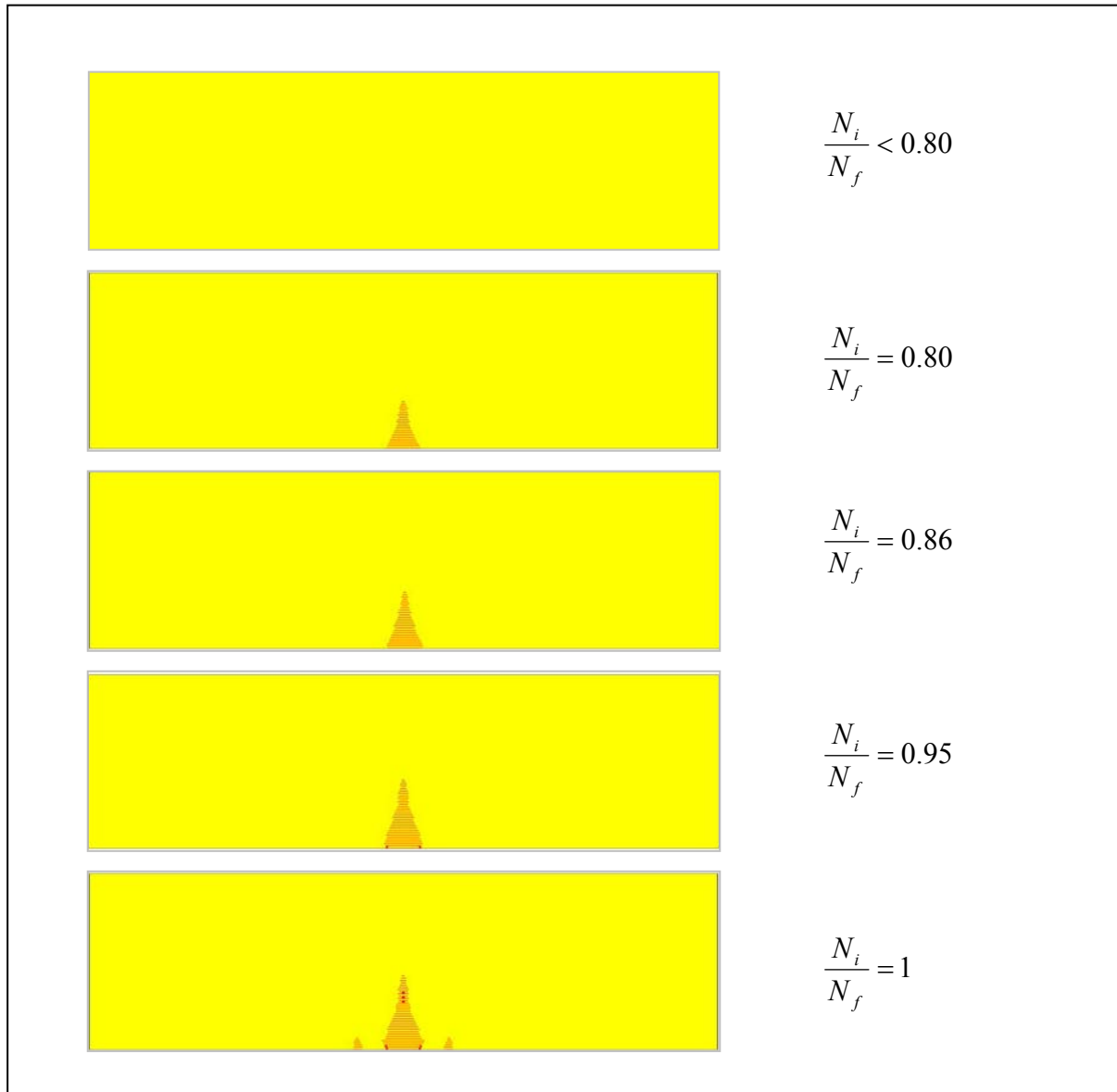


Figure 5.21 : Propagation des fissures sous chargement de fatigue – cas du matériau homogène

Nous observons que la phase d'initiation d'une fissure prend environ 80% de la durée de vie totale de la structure. Ces résultats sont très intéressants pour le dimensionnement des dalles de voie en béton. Ils confirment la méthode de dimensionnement par l'amorçage présentée dans le chapitre 4.

Nous simulons maintenant les fissurations dans les matériaux aléatoires. Les résultats numériques sont présentés dans la figure 5.22.

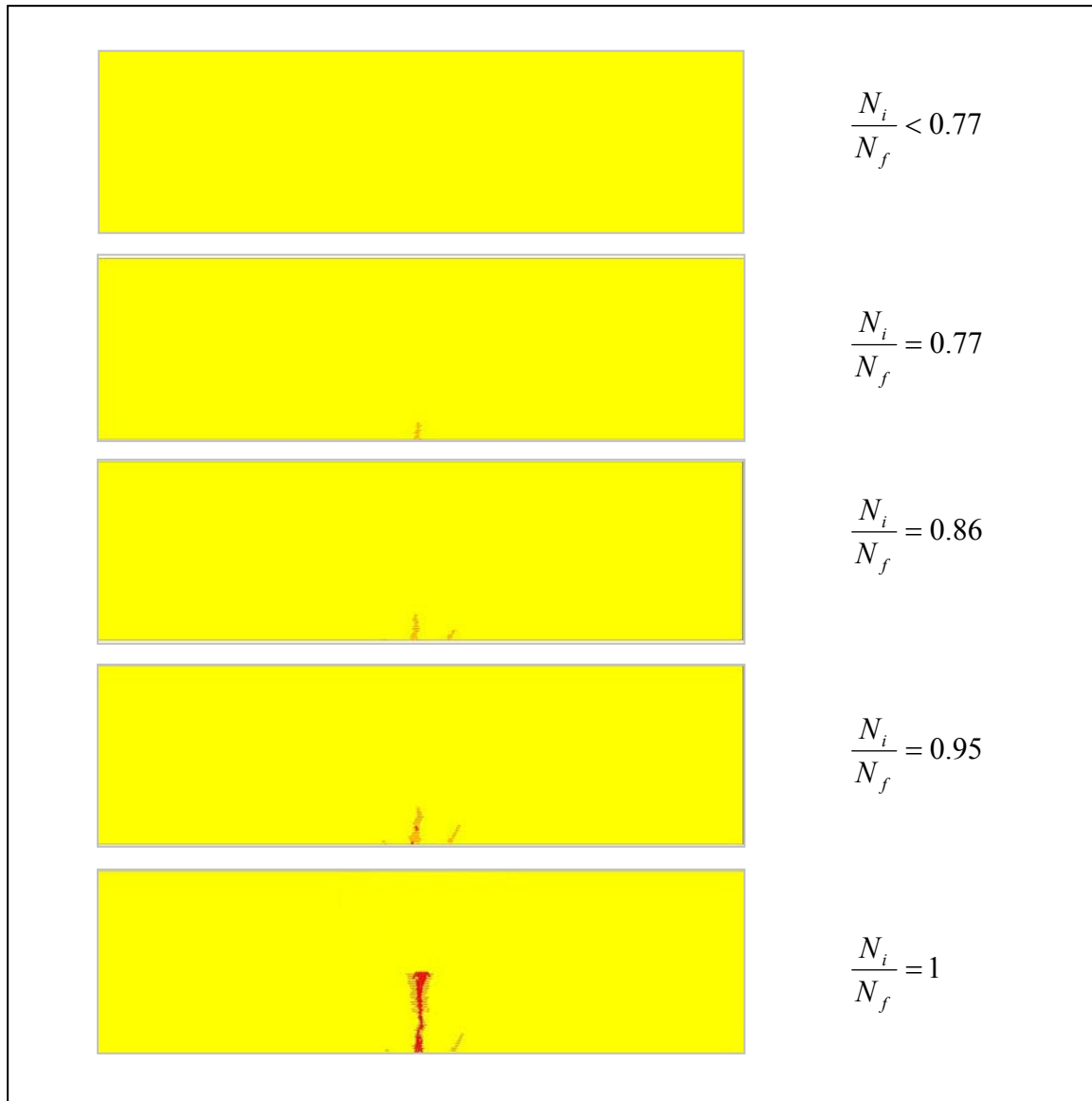


Figure 5.22 : Propagation des fissures sous chargement de fatigue – cas du matériau aléatoire

Nous observons là encore une phase d'initiation des fissures qui prend environ 80% de la durée de vie totale. Les fissures apparaissent aléatoirement dans la zone centrale sur la face inférieure de la poutre. Elles se propagent vers le haut et la rupture finale est provoquée par une macro-fissure principale.

5.5. Conclusions

Le modèle de réseau de poutres est utilisé dans ce chapitre pour étudier la propagation des fissures dans les structures en béton. La base théorique de ce modèle est la théorie des équivalences. L'idée principale de cette théorie est de modéliser un corps continu par un autre corps (généralement discret comme le modèle du réseau). L'équivalence entre les deux corps est assurée par l'identification de leur énergie de déformation élastique.

L'avantage de ce modèle est sa capacité de modéliser les caractéristiques aléatoires d'un matériau hétérogène (comme le béton). En plus, en enlevant progressivement les éléments rompus, nous pouvons suivre la cinématique de propagation des fissures dans les structures.

Les inconvénients de ce modèle sont sa mise en œuvre et le temps de calcul. Concernant la mise en donnée, la première difficulté est la construction du maillage car il faut construire manuellement beaucoup d'éléments « poutre » respectant la forme générale de la structure globale. Une autre difficulté concerne le réglage des paramètres (pas de chargement, conditions aux limites, etc.). Enfin, comme le calcul est itératif avec une mise à jour de la matrice de rigidité à chaque itération, le temps de calcul peut très vite augmenter quand on raffine le maillage.

Ce modèle de réseau a été implanté dans le logiciel de calcul éléments finis, CESAR-LCPC. Les résultats numériques (propagation des fissures) obtenus sont en tout point comparables avec les résultats d'essais (flexion trois points, flexion sur éprouvette entaillée, flexion quatre points du béton armé, cisaillement, et traction). Cela constitue une première étape de validation de ce modèle.

En utilisant un modèle d'endommagement pour modéliser la dégradation de la rigidité des éléments « poutres », nous pouvons utiliser le modèle de réseau de poutres pour suivre la propagation des fissures par fatigue dans les structures en béton. Les résultats numériques pour le cas d'une poutre sous chargement de flexion trois points montrent que la phase d'initiation d'une fissure prend plus que 80% de la durée de vie totale de la structure. Ces résultats *confirment* notre méthode de dimensionnement des dalles de voie par l'amorçage (chapitre 4).

Conclusions et Perspectives

Conclusions générales

Ce travail a porté sur l'étude de dégradation des voies ferrées urbaines. Les composantes de voie retenues pour cette étude sont le rail et la dalle de voie en béton.

Dégradation du rail

Concernant le rail, différents problèmes ont été traités: contact roue – rail, usure du rail, usure ondulatoire du rail, et fatigue de roulement (RCF) du rail.

Le premier problème étudié est le contact roue – rail. Différentes théories existent dans la littérature pour traiter ce problème. La théorie la plus utilisée pour modéliser la taille de la zone de contact et la pression dans la zone de contact est celle de Hertz. Concernant les efforts tangentiels, la théorie simplifiée de Kalker avec l'algorithme FASTSIM est implantée dans tous les logiciels commerciaux de calculs dynamiques ferroviaires. Cette théorie permet aussi de modéliser le comportement local (glissement ou adhérence) dans la zone de contact.

Le contact roue - rail est à l'origine de la plupart des défauts du rail. Les trois défauts étudiés dans cette étude sont l'usure abrasive, l'usure ondulatoire et la fatigue de roulement. Les mécanismes, les méthodes de traitement ainsi que les modèles mathématiques de prédiction de ces défauts ont été discutés en détail dans un premier temps. Un outil numérique, nommé CONUS, avec des interfaces graphiques a été développé dans un second temps. Cet outil permet de faciliter la mise en donnée des problèmes et d'afficher les résultats rapidement.

Afin de calculer l'usure abrasive du profil des rails, nous pouvons utiliser la théorie d'Archard ou la méthode de calcul de l'énergie dissipée dans la zone de contact. Ces deux méthodes sont implantées dans notre outil CONUS.

Un modèle linéaire est choisi pour prédire l'usure ondulatoire du rail. Ce modèle permet de trouver les fréquences de vibration du système voie – véhicule qui favorisent la formation de l'usure ondulatoire sur la surface du rail.

Les résultats numériques calculés par CONUS sont en tout point comparables avec ceux que l'on trouve dans la littérature. Cela constitue une première étape de validation de ce programme.

Pour le problème de fatigue de roulement du rail, dans le cas où nous ne possédons pas les caractéristiques élasto - plastiques du matériau et où la forme du contact est circulaire, nous pouvons utiliser la méthode « shakedown map » pour prédire le risque d'initiation des fissures par fatigue. Cependant, pour le contact roue - rail, la zone de contact est en général une ellipse et le matériau du rail est élasto - plastique avec écrouissage. C'est pourquoi nous devons utiliser une méthode numérique (méthode stationnaire) pour déterminer l'état asymptotique du rail. Cette méthode a été implantée dans un code de calcul par les éléments finis. Les résultats obtenus montrent bien l'influence de la taille du contact (rapport a/b).

Pour les chargements élevés (TGV, fret, inter-cité), la méthode « empirique » T-gamma se révèle être la plus simple et rapide permettant de prédire le risque d'initiation des fissures. Un autre avantage de cette méthode est qu'elle prend en compte la compétition entre l'usure et la fatigue. De plus, il est aisé de l'intégrer dans des logiciels de calculs dynamiques multicorps.

Fissuration et fatigue du béton

Deux approches ont été utilisées dans cette partie pour étudier la fatigue et la fissuration des structures en béton. Dans le chapitre 4, la fatigue du matériau béton a été étudiée à l'aide de la mécanique de l'endommagement. Tandis que la fissuration des structures en béton a été étudiée dans le chapitre 5 à l'aide du modèle de réseau de poutres.

En utilisant les modèles simples de la mécanique de l'endommagement (le formalisme de Marigo couplé avec le modèle d'endommagement de Mazars), nous arrivons à modéliser la dégradation progressive de la rigidité du matériau sous chargement cyclique. Nous pouvons reproduire les trois phases d'évolution classique de la fatigue du béton.

Des courbes numériques de fatigue (courbes de Wöhler) du matériau béton sous chargement de traction ou de compression ont été construites. Ces courbes numériques représentent parfaitement les résultats expérimentaux. L'avantage des calculs numériques est que nous pouvons tracer les courbes de Wöhler jusqu'à un très grand nombre de cycles, nombre de cycles qu'il est souvent difficile d'atteindre par des essais expérimentaux en raison des capacités limitées des machines et/ou des contraintes de temps.

Les calculs dans le cadre d'un chargement biaxial traction – traction, nous permettent de montrer que la deuxième composante de traction n'influence pas la fatigue du béton. Ce résultat est très intéressant

pour le dimensionnement des dalles ferroviaires qui subissent des charges biaxiales au niveau des faces inférieures.

Afin de vérifier les calculs numériques et d'identifier les paramètres de notre béton, nous avons réalisé une campagne d'essais en laboratoire sur les éprouvettes parallélépipédiques en flexion. Les résultats expérimentaux obtenus montrent une bonne cohérence avec les résultats d'essais trouvés dans la littérature, avec cependant une résistance à la fatigue légèrement plus élevée.

Dans la dernière section du chapitre 4 une application sur le dimensionnement de la dalle de voie en béton pour les voies ferrées urbaines a été présentée. Un calcul simple peut nous confirmer la performance en fatigue d'une dalle de voie.

Dans le chapitre 5 le modèle de réseau de poutres a été utilisé pour étudier la propagation des fissures dans les structures en béton. La base théorique de ce modèle est la théorie des équivalences. L'idée principale de cette théorie est de modéliser un corps continu par un autre corps (généralement discret comme le modèle du réseau). L'équivalence entre les deux corps est assurée par l'identification de leur énergie de déformation élastique.

Ce modèle de réseau de poutres a été implanté dans le logiciel de calcul éléments finis, CESAR-LCPC. Des simulations numériques portant sur des structures simples en béton sous chargement statique (flexion trois points, flexion sur éprouvette entaillée, flexion quatre points du béton armé, cisaillement, et traction) ont été réalisées permettant de déterminer le trajet des fissures dans ces structures. Les résultats numériques (propagation des fissures) obtenus sont en tout point comparables avec les résultats d'essais. Cela constitue une première étape de validation de ce modèle.

En utilisant un modèle d'endommagement pour modéliser la dégradation de la rigidité des éléments «poutres», nous pouvons utiliser le modèle de réseau de poutre pour suivre la propagation des fissures par fatigue dans les structures en béton. Les résultats numériques pour le cas d'une poutre sous chargement de flexion trois points montrent que la phase d'initiation d'une fissure prend plus que 80% de la durée de vie totale de la structure. Ces résultats *confirment* notre méthode de dimensionnement des dalles de voie par l'amorçage (chapitre 4).

Perspectives

Voici une liste non exhaustive des perspectives que nous pouvons envisager pour notre étude :

- Nous avons calculé dans cette thèse l'usure de profil des rails pour un passage du train sur le rail. Pour pouvoir suivre l'évolution du profil usé, des calculs bouclés doivent être envisagés. Pour cela, à chaque passage du train nous devons faire un calcul dynamique ferroviaire et mettre à jour le profil usé.
- Le calcul du « taux d'usure ondulatoire » ne permet de prédire que la fréquence la plus favorable à la création de l'usure ondulatoire sur la surface du rail. Afin de pouvoir suivre l'évolution du profil du rail et l'amplitude de l'usure ondulatoire, nous devons modéliser la rugosité de la surface du rail par une fonction périodique, et utiliser la décomposition de Fourier.
- Afin de faire un calcul complet de la fatigue de roulement du rail, il faut suivre le schéma dans la partie 2.1.5 (fig. 2.5). Cette méthode permet d'avoir plus de détails sur la position du point d'amorçage des fissures, le nombre de cycles pour l'amorçage ainsi que la propagation des fissures. Cependant, il faut identifier un grand nombre de paramètres du matériau. De plus, poursuivre ce schéma de calcul est très consommateur de temps pour la compréhension du problème d'une part, et pour les calculs numériques d'autre part.
- Nous pouvons optimiser le temps de calcul avec le modèle de réseau de poutres en faisant des maillages variables avec différentes tailles d'élément ou différents types d'élément. La zone fissurée peut être maillée avec des éléments plus petits que dans les autres parties de la structure. Des éléments « solides » peuvent aussi être utilisés couplés avec le réseau.
- L'extension du modèle de réseau de poutres en 3D reste aussi une perspective possible.
- Enfin, l'utilisation du modèle d'endommagement de Paas couplé avec le modèle de réseau de poutres permettra de calculer le nombre de cycle à rupture par fatigue.

Bibliographie

Aas-Jakobsen K.T., Fatigue of concrete beam and columns, NTH Institute of Betongkonstruksjoner, Bulletin 70-1, 1970.

Absi E., Methodes de calcul numérique et élasticité, *Eyrolles*, Paris, 1978.

Absi E., Theorie des équivalences : nouveaux développements et applications, *Comité technique de l'association française des ponts et chaussées*, Paris, 1972.

Alliche A., damage model for fatigue loading of concrete, *International Journal of Fatigue*, 26 (2004) 915-921.

Andersson C. and Johansson A., Prediction of rail corrugation generated by three – dimensional wheel- rail interaction, *Wear* 257(2004) 423-434, 2004.

Archard J.F., Contact and Rubbing of Flat Surface, *J. Appl. Phys.* 24 (8): 981-988, 1953.

Baek K.S. et al., An experimental investigation of transient traction characteristics in rolling-sliding wheel/rail contact under dry-wet conditions, *Wear* (2007), doi: 10.1016/j.wear.2007.01.067.

Baeza L. et al., Prediction of corrugation in rails using a non-stationary wheel-rail contact model, 7th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems, 2006.

Barenblatt, G.I., Botvina, L.R., Incomplete self-similarity of fatigue in the linear range of fatigue crack growth. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 3:193-202, 1980.

Baron J., La fatigue du béton hydraulique, *Press de l'ENPC*, Paris 1982.

Bathias C et Bailon J.P, La fatigue des matériaux et des structures, Hermès Science Publications, , 688p, 1997.

Baumann G., Knothe K., Fecht H.J., Surface modification: corrugation and nanostructure formation of high speed, *NanoStructured Materials*, Vol.9, pp 751-754, 1997.

Bazant Z.P. and Ozbolt J., Non-local microplane model for fracture, damage and size effect in structures. *J. Engng. Mech. ASCE*, 116, 2485-2505, 1990.

Bazant Z.P. and Kangming Xu, Size effect in fatigue fracture of concrete, *ACI Journal* 88-M46 (1991) 390-399.

Bazant Z.P. and William F. Schell, Fatigue fracture of high strength concrete and size effect, *ACI Materials Journal*, 90-M50, No.5, 1993.

Bazant Z.P., Concrete fracture models: testing and practice, *Engng Fract. Mech.*, Vol. 69, pp 165-205, 2002.

Bingley M.S. and Schnee S., A study of the mechanism of abrasive wear for ductile metals under wet and dry three-body conditions, *Wear* 258(2005) 50-61, 2005.

Blouet J., Usure, *Techniques de l'Ingénieur*, B585_2_1978, Vol papier n° : ARCH4, 1978.

Blouet J., Frottement Usure, *Techniques de l'Ingénieur*, A3139_2_1986.

Bodin D., Modèle d'endommagement cyclique : Application à la fatigue des enrobés bitumineux, *Thèse de l'Ecole Centrale de Nantes et l'Université de Nantes*, 2002.

Bodin D., Endommagement en fatigue des matériaux bitumineux: Comparaison des essais de laboratoire, *Journées Techniques Routes*, Février 2008.

Bower A.F. et Johnson K.L., Plastic flow and shakedown of the rail surface in repeated wheel-rail contact, *Wear* 1991, 144, 1-18.

Braghim F. et al., A mathematical model to predict railway wheel profile evolution due to wear, *Wear* 261 (2006) 1253-1264.

Broek D. and J . Schijve, The influence of the mean stress on the propagation of fatigue cracks in aluminium alloy sheet. NLR. Report M 2111, 1963.

Bucher F., Knothe K. and Theiler A., Normal and tangential contact problem of surfaces with measured roughness, *Wear* 253(2002) 204-218.

Bucher F. et al., Multiscale simulation of dry friction in wheel-rail contact, *Wear* 261(2006) 874-884.

Burstow M.C., Whole Life Rail Model Application and Development for RSSB – Continued Development of an RCF Damage Parameter, *AEATR-ES-2004-880 Issue 2*.

Cachim P.B. et al., Effects of long steel fibres on the fatigue life of concrete, Sheffield Academic Press, Royaume-Uni, 1999.

Cannon D.F. et Pradier H., Rail rolling contact fatigue : Research by the European Rail Research Institute, *Wear* 191 (1996) 1-13.

Carpinteri A., Spagnoli A., A fractal analysis of size effect on fatigue crack growth, *Int. J. Fatigue*, Vol. 26, pp. 125-133, 2004.

Carter, F. W., On the action of a locomotive driving wheel. *Proceedings of the Royal Society of London*, 151-157, 1926.

Cedolin L, Deipoli S, Iori I, Tensile behaviour of concrete. *J. Eng. Mech. ASCE* 113(3): 431-449, 1987.

Chang D., Chai W.K., Flexural fracture and fatigue behaviour of steel-fibre-reinforced concrete structures, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 156, pp 201-207, 1995.

Clayton P., Tribological aspects of wheel-rail contact : a review of recent experimental research, *Wear* 191, p 170-183, 1996.

Colin D. Johnston et Robert W. Zemp, Flexural fatigue performance of steel fiber reinforced concrete – Influence of fiber content, aspect ratio and type, *ACI Journal* 88-M44 (1991) 374-383.

Collette C., Usure ondulatoire en transport ferroviaire- mécanisme et réduction, thèse de l'ULB, 2007.

Cornelissen H.A.W, Fatigue failure of concrete in tension. *HERON* 29 4 (1984), pp. 1-68.

Coste J.F., Les essais de chaussées en béton sur le manège de fatigue du LCPC, 1992.

Cusatis et al., Confinement shear lattice model for concrete damage in tension and compression, *ASCE*, 129(12), 2003.

DangVan K. et Maitournam H., Steady state flow in classical elastoplasticity: application to repeated rolling and sliding contact, *J. Mech. Phys. Solids* 41(11) (1993) 1691-1710.

DangVan K., Maitournam H., et Prasil B., Elastoplastic analysis of repeated moving contact: application to railways damage phenomena, *Wear* 196 (1996) 77-81.

DangVan K. et Maitournam H., On some recent trends in modeling of contact fatigue and wear in rail, *Wear* 25 (2002) 219-227.

DangVan K. et Maitournam H., Fatigue polycyclique des structures, *Cours de l'Ecole Polytechnique*, Palaiseau, 2004.

DangVan K. et Maitournam H., Moumni Z., Roget F., A global approach for modeling fatigue and fracture of rails, *Vème Journées d'études technique 2008, Les sciences et les technologies mécaniques, moteurs du développement durable dans les secteurs des énergies renouvelables, des transports et de la santé*, Mai 2008.

Descartes S. and al., Presence and role of third body in a wheel-rail contact, *Wear* 258(2005) 1081-1090, 2005.

Desmorat R., Damage and Fatigue: Continuum Damage Mechanics modelling for fatigue of materials and structures, *Cours ENS Cachan*, 2006.

Diana G. et al., Experimental and numerical investigation on subway short pitch corrugation, *Vehicle System Dynamics*, 28(1998), 234-245, 1998.

Do M.T., Omar C. and Pierre Claude A., Fatigue behaviour of high performance concrete, *Journal of Materials in civil Engineering*, Vol.5, No.1, 1993.

Donzella G. and al., The competitive role of wear and RCF in a rail steel, *Engineering Fracture Mechanics* 72(2005) 287-308, 2003.

Dragon-Luiset M., *Contribution à une approche théorique de la mécanique de l'usure*, thèse de l'Ecole Polytechnique, 2000.

Dragon A. et al., Anisotropic damage in quasi-brittle solids: modelling, computational issues and applications, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.183, pp. 331-352, 2000.

Du J, Yon J H, Hawkins N M, Kobayashi A S, Analysis of the Fracture Process Zone of a Propagating Concrete Crack Using Moire Interferometry, in *Micromechanics of Failure of Quasi-Brittle Materials*, S P Shah, S E Swartz and M L Wang (eds.) London: Elsevier Applied Science, 146–155, 1990.

- Eadie D.T., Kalousek J. et al., The role of high positive friction modifier in the control of short pitch corrugations and related phenomena, *Wear* 253 (2002) 185-192, 2002.
- Egana J.I et al., Investigation of the influence of rail pad stiffness on rail corrugation on a transit system, *Wear* 261(2006) 216-224, 2006.
- Ekberg A., Nielsen J.C.O. et al., Subsurface initiated rolling contact fatigue of railway wheels as generated by rail corrugation, *International Journal of Solids and Structures*, 2007.
- Ekberg A., Rolling contact fatigue of railway wheels – computer modelling and in-field data, *CHARMEC*, S-412 96 Goteborg, Sweden 1995.
- Ekberg A., Rolling contact fatigue of railway wheels – a parametric study, *Wear* 211 (1997) 280-288.
- Ekberg A. et al., An engineering model for prediction of rolling contact fatigue of railway wheels, *CHARMEC*, SE-412 96 Gotbenburg Sweden 2002.
- Ekberg A. et Kabo E., Fatigue of railway wheels and rails under rolling contact and thermal loading – an overview, *Wear* 258 (2005) 1288-1300.
- Ekberg A. et al., Subsurface initiated rolling contact fatigue of railway wheels as generated by rail corrugation, *International Journal of Solids and Structures* 44 (2007) 7975-7987.
- Enblom R. and Berg M., Impact of non-elliptic contact modelling in wheel wear simulation, 7th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail-Wheel Systems, Australia, 2006.
- Erdogan F., Ratwani M., Fatigue and fracture of cylindrical shells containing a circumferential crack, *International Journal of Fracture Mechanics*, 1970.
- Esveld C., *Modern Railway Track*, Delft university of Technology, 2001.
- Evans J.R. and Burstow M.C., Vehicle/track interaction and rolling contact fatigue in rails in the UK, *Vehicle System Dynamics*, Vol. 44, Supplement, 2006, 708-717.
- Figueiras J A, Owen D R J, Non-linear analysis of reinforced concrete shell structures. Intl. conf. on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Part I, split, Yugoslavia, 509–532, 1984.
- Fillot N., Iordanoff I. and Berthier Y., Wear modelling and the third body concept, *Wear* 262(2007) 949-957, 2007.

Fletcher D.I. and Kapoor A., Rapid method of stress intensity factor calculation for semi-elliptical surface breaking cracks under three-dimensional contact loading, The University of Newcastle upon Tyne, Barrow Hill, UK 2006.

Fletcher D.I. et al., Rail rolling contact fatigue dependence on friction, predicted using fracture mechanics with a three-dimensional boundary element model, *Engineering Fracture Mechanics* 76 (2009) 2612-2625.

Footer M L, Mai YW, Cotterell B, Crack growth resistance curves in strain-softening materials. *J. Mech. and Physics of Solids* 34(6): 593–607, 1986.

Ford R.A.J. and D.J. Thompson, Simplified contact filters in wheel/rail noise prediction, *Journal of Sound and Vibration*, 2006 293, 807-818.

Forman, A. G., Numerical analysis of crack *propagation* in cyclic-loaded structures. *J. Basic Engng* 89, 459–469, 1967.

Franklin F.J. and Kapoor A., Modelling wear and crack initiation in rails, The University of Newcastle upon Tyne, Barrow Hill, UK 2006.

Frost N.E., Dugdale D.S., The propagation of fatigue cracks in sheet specimens, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 6, pp. 92-110, 1958.

Fuchs W., Eligehause R. and John E. Breen, Concrete capacity design approach for fastening to concrete, *ACI Journal* 92-S9(1995) 73-94.

Galloway J.W. et al., Effects of age on flexural fatigue and compressive strength of concrete, Transport and Road Research Laboratory Report, 1979.

Gaedicke C. et al., Fatigue crack growth prediction in concrete slabs, *International Journal of Fatigue* 31 (2009) 1309-1317.

Gomez I., Vadillo E.G., An analytical approach to study a special case of booted sleeper track rail corrugation, *Wear* 251(2001) 916-924, 2001.

Gomez I., Vadillou E.G, A linear model to explain short pitch corrugation on rails, *Wear* 255 (2003) 1127-1142, 2003.

Gomez I. et al., A comprehensive track model for the improvement of corrugation models, *Journal of Sound and Vibration* 293(2006) 522-534, 2006.

Gopalaratnam V S, Shah S P 1985 Softening response of plain concrete in direct tension. *ACI Journal* 82(3): 310–323

Grassie S.L., Short wavelength rail corrugation: field trials and measuring technology, *Wear* 191(1996) 149-160, 1996.

Grassie S.L. et al., Measurement of longitudinal rail irregularities and criteria for acceptable grinding, *Journal of Sound and Vibration* (1999) 227, 949-964, 1999.

Grassie S.L., Rail corrugation: advances in measurement, understanding and treatment, *Wear* 258(2005) 1224-1234, 2005.

Grassie S.L., Edwards J.W., Development of corrugation as a result of varying normal load, 7th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems, 2006.

Grassie S.L., Rolling contact fatigue on the British railway system: treatment, *Wear* 258 (2005) 1310-1318.

Grohmann H.D. and Schoech W., Contact geometry and surface fatigue- minimizing the risk of headcheck formation, *Wear* 253(2002) 54-59, 2002.

Guo L.P. et al., Investigation on fatigue damage mechanism of modern concrete microstructure by lattice model, *1st International Conference on Microstructure Related Durability of Cementitious Composites*, October 2008, Nanjing, Chine.

Guo L.P. et al., Fatigue damage of high performance concrete through a 2D mesoscopic lattice model, *Computational Materials Science* 44 (2009) 1098-1106.

Guo L.P. et al., Experimental and numerical investigations on fatigue damage propagation and life prediction of high-performance concrete containing reactive mineral admixtures, *International Journal of Fatigue* 32 (2010) 227-237.

Gylltoft, K., *Fracture Mechanics Models for Fatigue in Concrete Structures*. Doctoral Thesis 1983:25D, Division of Structural Engineering, Luleå University of Technology, Sweden, 1983.

- Haines D.J., Ollerton E., Contact stress distributions on elliptical contact surface subjected to radial and tangential forces, *Proceeding, Institution of Mechanical Engineers*, 177, 95, pp. 261-265, 1963.
- Hempelmann K., Hiss F., Knothe K. and Ripke B., The formation of wear patterns on rail tread, *Wear*, 144(1991) 179-195.
- Hempelmann K., et al., The formation of wear patterns on rail tread, *Wear* 144(1991),179-195, 1991.
- Hempelmann K. and Knothe K., An extended linear model for the prediction of short-pitch corrugation, *Wear* 191(1996) 161-169, 1996.
- Hénaff G. et Morel F., Fatigue des structures – Endurance, critères de dimensionnement, propagation des fissures, rupture, *Technosup, Ellipse*, Paris 2005.
- Herrmann, H. J., Hansen, A. and Roux, S., Fracture of disordered elastic lattices in two dimensions, *Physical Rev. B*, 39, pp. 637-647, 1989.
- Hertz H., On the contact of elastic solids, London: Macmillan, 1896.
- Hiensch M., Nielsen J.C.O., Verheijen E., Rail corrugation in the Netherlands: measurements and simulations, *Wear* 253(2002) 140-149, 2002.
- Hillerborg A., Modeer M. & Petersson P.G. "Analysis of crack formation and crack growth in means by fracture mechanics and finite elements", *Ciment and concrete research*, Vol. 6, pp. 773-786, 1976.
- Hordijk D.A., Local approach to fatigue of concrete, *Thesis Technische Universiteit Delft*, 1991.
- Horii H. et al., Mechanics of fatigue crack growth in concrete, *Cement and concrete composites*, Vol.14, pp. 83-89, 1992.
- Hsu T.T.C., Fatigue of plain concrete, *ACI Journal* 78-27(1981) 292-305.
- Igeland A., Ilias H., Rail head corrugation growth predictions based on non-linear high frequency vehicle/track interaction, *Wear* 213(1997) 90-97,1997.
- Ilias H., The influence of railpad stiffness on wheelset/track interaction and corrugation growth, *Journal of Sound and Vibration* (1999) 227, 935-948, 1999.
- Ince R, Arslan A, Karihaloo B L, Lattice modelling of size effect in concrete strength. *Eng. Fract. Mech.* 70: 2307–2320, 2003.

- Ishida M., Moto T. and Takikawa M., The effect of lateral creepage force on rail corrugation on low rail at sharp curves, *Wear* 253(2002) 172-177, 2002.
- Jagota A., Bennison S.J., Spring-network and finite element models for elasticity and fracture, *Physics and astronomy*, Vol. 437, pp. 186-201, 1994.
- Jin X. et al., Effect of a scratch on curved rail on initiation and evolution of rail corrugation, *Tribology International* 37(2004) 385-394, 2004.
- Jin X. et al., Numerical simulation of rail corrugation on a curved track, *Computers and Structures* 83(2005), 2052-2065, 2005.
- Jin X. et al., Effect of track irregularities on initiation and evolution of rail corrugation, *Journal of Sound and Vibration* 285(2005) 121-148, 2005.
- Jin X., Effect of passenger car curving on rail corrugation at a curved track, *Wear* 260(2006) 619-633, 2006.
- Jin X et al., Three-dimensional train-track model for study of rail corrugation, *Journal of Sound and Vibration* 293(2006) 830-855, 2006.
- Johansson A., Out-of-round railway wheel: Causes and consequences, Thesis of Chalmers University of Technology, Sweden, 2005.
- Johansson A., Nielsen J.C.O., Rail corrugation growth – Influence of powered wheelsets with wheel tread irregularities, *Wear* 262(2007) 1296-1307, 2007.
- Johnson K.L., Contact Mechanics, *Cambridge University Press* 1985.
- Johnson K.L., The application of shakedown principles in rolling and sliding contact. *Eur J Mech, A/Solids* 1992, 11, 155-172.
- Ju J.W., on energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modelling and computational aspects, *IJSS*, 25(7): 803-833, 1989.
- Kachanov L.M., Time of the rupture process under creep conditions, *Isv. Akad. Nauk. SSR. Otd Tekh. Nauk.*, 8, p 26-31, 1958.
- Kae Hwan K., June S. et Hsu T.T.C., Shear fatigue behavior of steel fiber reinforced concrete beams, *ACI Structural Journal*, 88-S18 (1991), 155-160.

- Kalker J.J., Rolling with slip and spin in the presence of dry friction, *Wear*, 9 (1966) 20-38.
- Kalker J.J., The tangential force transmitted by two elastic bodies rolling over each other with pure creepage, *Wear*, 11 (1968).
- Kalker J.J., A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact, *VSD* 11(1982), 1-13.
- Kalker J.J., Mathematical models of friction for contact problems in elasticity, *Wear*, 113(1986) 61-77.
- Kalker J.J., Variational and non-variational theory of frictionless adhesive contact between elastic bodies, *Wear*, 119(1987) 63-76.
- Kalker J.J., Wheel-rail rolling contact theory, *Wear*, 144(1991) 243-261.
- Kalker J.J., Simulation of the development of a railway wheel profile through wear, *Wear*, 150(1991) 355-365.
- Kalker J.J., Considerations on rail corrugation, *Vehicle System Dynamics*, 23(1994), 3-28, 1994.
- Kapoor A. et al., A model for the mild ratchetting wear of metals, *Wear* 200 (1996) 38-44.
- Kapoor A., wear by plastic ratchetting, *Wear* 212(1997) 119-130.
- Kapoor A. et al., The effect of partial slip on the wear rate of rails, *Wear* 258(2005) 1031-1037.
- Kapoor A. et al., Managing the critical wheel/rail interface, The University of Sheffield, UK 2002.
- Kapoor A., J.A. Williams, Shakedown limits in rolling-sliding point contacts on an anisotropic half space, *Wear* 191(1996) 256-260.
- Kapoor A. and al., Prediction of fatigue crack initiation for rolling contact fatigue, *Wear* 22(2000) 205-215.
- Kapoor A. and al., Rolling contact fatigue and wear behaviour of the infrastar two-material rail, *Wear* 258(2005) 1048-1054.
- Kapsa P. et Cartier M., Usure des contacts mécaniques – Problématique et définitions, Techniques de l'Ingénieur, BM5065_04_2001, Vol papier n° : BD1, 2001.

Kapsa P. et Cartier M., Usure des contacts mécaniques – Eléments de tribologie, Techniques de l'Ingénieur, BM5066_04_2001, Vol papier n° : BD1, 2001.

Kapsa P. et Cartier M., Usure des contacts mécaniques – Manifestations de l'usure, Techniques de l'Ingénieur, BM5067_10_2001, Vol papier n° : BD1, 2001.

Kapsa P. et Cartier M., Usure des contacts mécaniques – Maîtrise de l'usure et du frottement, Techniques de l'Ingénieur, BM5068_10_2001, Vol papier n° : BD1, 2001.

Kesler C.E., Effect of speed of testing on flexural fatigue strength of plain concrete, Proceeding of the Highway Research Board, V.32, 1953.

Kim J.K. and Kim Y.Y., Experimental study of the fatigue behaviour of high strength concrete, *Cement and Concrete Research*, Vol. 26, No.10, pp. 1513-1523, 1996.

Knothe K. and Liebelt S., Determination of temperatures for sliding contact with applications for wheel-rail systems, *Wear* 189(1994) 91-99.

Knothe K., Grassie S.L., Workshop on rail corrugations and out-of-round wheels, *Journal of Sound and Vibration* (1999) 227, 895-897, 1999.

Kozicki J. and Teichman J., Modelling of fracture process in concrete using a novel lattice model, *Granular Matter* (2008) 10: 377-388.

La Borderie C. "Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : Modélisation et Application à l'analyse des structures en béton", Thèse doctorale, Paris 6, 1991.

Ladevèze P., Sur une théorie de l'endommagement anisotrope, Rapport interne, ENS Cachan, No. 34, 1983.

Lavis R. et al., Railway wheel wear predictions with adams/rail, The University of Sheffield, UK 2002.

Lavis R. et al., Integrating dynamics and wear modelling to predict railway wheel profile evolution, 6th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail-Wheel Systems, Sweden, 2003.

Lavis R. et al., A new CAE procedure for railway wheel tribological design, 14th International Wheelset Congress, Orlando, USA 2004.

- Lee M.K. and Barr B.I.G., An overview of the fatigue behaviour of plain and fibre reinforced concrete, *Cement and Concrete Composites* 26 (2004) 299-305.
- Lemaitre J. et Chaboche J.L., *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, deuxième édition, Paris, 2006.
- Li Z., Wheel-rail rolling contact and its application to wear simulation, thèse de Delft Technical University, 2002.
- Li Z. et al., An investigation into the causes of squats – correlation analysis and numerical modelling, *Wear* 265 (2008) 1349-1355.
- Li Z. et al., The validation of some numerical predictions on squats growth, *8th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems*, Firenze, Italy, September 15-18, 2009.
- Li Z. et al., The determination of a critical size for rail top surface defects to grow into squats, *8th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems*, Firenze, Italy, September 15-18, 2009.
- Liaw B.M. et al., Improved nonlinear model for concrete fracture, *J. Engrg. Mech.*, 116, 429, 1990.
- Lilliu G. et Van Mier J.G.M., 3D lattice type fracture model for concrete, *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2003) 927-941.
- Lilliu G. et Van Mier J.G.M., On the relative use of micro-mechanical lattice analysis of 3 phase particle composites, *Engineering Fracture Mechanics* 74 (2007) 1174-1189.
- Liu O.Y., Zhang B., Zhou Z.R., An experimental study of rail corrugation, *Wear* 255(2003) 1121-1126, 2003.
- Lu J., Fatigue des alliages ferreux- définitions et diagrammes, BM 5 042, *Technique des ingénieurs*.
- Lu J., Facteurs d'influence, *Techniques de l'ingénieur*, BM 5 043.
- Lu J., Exemples de calcul, *Techniques de l'ingénieur*, BM 5 044.
- Lubliner J. et al., A plastic-damage model for concrete, *Int. J. Solids Structures*, Vol.25, No.3, pp. 299-326, 1989.

- Maitournam H., Formulation et résolution numérique des problèmes thermoviscoplastiques en régime permanent, Thèse de l'ENPC, 1989.
- Marigo J.J., Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids, *Engineering Fracture Mechanics*, vol.21, no. 4, pp. 861-874, 1985.
- Matsumoto A. et al., Formation mechanism and countermeasures of rail corrugation on curved track, *Wear* 253(2002) 178-184, 2002.
- Mazars J., Prédiction de la rupture des structures en béton par la mécanique de la rupture, *Thèse de 3ème cycle université Pierre et Marie Curie*, Paris 6, 1976.
- Mazars J., application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure, *Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie*, Paris 6, 1984.
- Mazars J. and Pijaudier-Cabot G., From damage to fracture mechanics and conversely: a combined approach, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 33, No. 20-22, pp. 3327-3342, 1996.
- McCall J.T., Probability of fatigue failure of plain concrete, *ACI journal*, V. 55, No. 2, pp 221-231, 1958.
- Meakin P., Models for material failure and deformation, *Science Magazine*, 252 (5003): 226-234, 1991.
- Meehan P.A. et al., Prediction of the growth of wear-type rail corrugation, *Wear* 258(2005) 1001-1013, 2005.
- Meng H.C. and Ludema K.C., Wear models and predictive equations: their form and content, *Wear* 181-183(1995) 443-457, 1994.
- Mezlini S. and al., Experimental, numerical and analytical studies of abrasive wear: correlation between wear mechanisms and friction coefficient, *C.R. Mecanique* 333(2005) 830-837, 2005.
- Miled K. et al., Effet d'échelle dans le béton léger de polystyrène expansé, *Colloque Microstructure et Propriétés des Matériaux*, ENPC, pp. 189-194, 2005.
- Miner M.A., Cumulative damage in fatigue, *J. Applied Mechanics*, 12, 159-164, 1945.
- Milman Y.V. et al., Tribological properties of the surface of railway tracks, studied by indentation technique, *Wear* 258(2005) 77-82.

Mirosław G. and Christian M., Damage accumulation in concrete with and without fiber reinforcement, *ACI Materials Journal*, V.90, No 6, 1993.

Morris A.D. and Garrentt G.G., A comparative study of the static and fatigue behaviour of plain and steel fibre reinforced mortar in compression and direct tension, *The International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete*, Vol. 3, No. 2, 1981.

Mousavi S.A.A. et al., Three dimensional numerical analyses of asymmetric rolling, *Journal of Materials Processing Technology* 187-188 (2007) 725-729.

Mu B. and Shah S.P., Fatigue behavior of concrete subjected to biaxial loading in the compression region, *Material and Structures* 38 (2005) 289-298.

Müller S., A linear wheel-track model to predict instability and short pitch corrugation, *Journal of Sound and Vibration* (1999) 227, 899-913, 1999.

Murdock J.W and Kesler C.E., Effects of range of stress on the fatigue strength of plain concrete, *ACI journal*, V. 30, No.2, 1958.

Nast J.D. et al., On rolling contact fatigue analysis practice in railway industry: models and applications, ALSTOM Transport, Bogie Design Department, Le Creusot, France.

Nelson E.L. et al., Behavior and failure of high-strength concrete subjected to biaxial cyclic compression loading, *ACI Material Journal*, 1988.

Nicholson R.D., The effect of temperature on creep crack propagation in AISI 316 stainless steel, *Materials Science and Engineering*, Vol. 22, pp. 1-6, 1976.

Nielsen J.B., Evolution of rail corrugation predicted with a non-linear wear model, *Journal of Sound and Vibration* (1999) 227, 915-933, 1999.

Nielsen J.C.O., Numerical prediction of rail roughness growth on tangent railway tracks, *Journal of Sound and Vibration* 267(2003), 537-548, 2003.

Oh B.H., Fatigue life distributions of concrete for various stress levels, *ACI Journal* 88-M15 (1991) 122-128.

Oostermeijer K.H., Review on short pitch corrugation studies, 7th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems, 2006.

- Paas M.H.J.W, Continuum damage mechanics with an application to fatigue, *Thesis Technische Universiteit Eindhoven* 1990.
- Pantazopoulou S.J. and Mills R.H., Microstructural aspects of the mechanical response of plain concrete, *ACI Journal* 92-M662 (1995) 605-616.
- Papa E. and Taliercio A., Anisotropic damage model for the multiaxial static and fatigue behaviour of plain concrete, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 55, No. 2, pp. 163-179, 1996.
- Papa E., A damage model for concrete subjected to fatigue loading, *Eur. J. Mech., A/ Solids*, Vol.12, No.3, pp.429-440, 1993.
- Peerling R.H.J., Enhanced damage modelling for fracture and fatigue, these de doctorat, Faculty of Mechanical Engineering, Eindhoven University, 1999.
- Pijaudier-Cabot G. et al., Non local Damage Theory, *The Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 113, No. 10, 1987.
- Polach O., A fast wheel-rail forces calculation computer code, *The Dynamics of Vehicles on Roads and on Tracks*, Vol. 33, 16th IAVSD Symposium, South Africa, 1999.
- Pointner P., Donawitz L., The impact of wear and rolling contact fatigue on rails – a pragmatic approach, *ZEVRail Glasers Annalen* 132 (2008).
- Ponter A.R.S. et al, Application of the kinematical shakedown theorem to rolling and sliding contact point. *J Mech Phys Solids* 1985, 33, 339-362.
- Ponter A.R.S. et al., Shakedown analyses for rolling and sliding contact problems, *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006) 4201-4219.
- Rabinowicz E., *Friction and wear of materials*, 315p, 1965.
- Ramtani S. "Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral", Thèse de Doctorat d'Etat, Paris 6, 1990.
- Reinhardt H.W. et al., Post-peak cyclic behaviour of concrete in uniaxial tensile and alternating tensile and compressive loading, *Cement and concrete research*, Vol 14, pp. 263-270, 1984.
- Reinhardt H W, Crack softening zone in plain concrete under static loading. *Cement Concrete Research* 15: 42–52, .

Richards C.E. and Lindley T.C., The influence of stress intensity and microstructure on fatigue crack propagation in ferritic materials, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 4, Issue 4, pp. 951-978, 1972.

Ringsberg J.W. et al., Prediction of fatigue crack initiation for rolling contact fatigue, *International Journal of fatigue* 22 (2000) 205-215.

Ringsberg J.W. et Lindback T., Rolling contact fatigue analysis of rails including numerical simulations of the rail manufacturing process and repeated wheel-rail contact loads, *International Journal of fatigue* 25 (2003) 547-558.

Roelfstra P.E and Wittmann F.H., Numerical method to link strain softening with failure of concrete, Fracture toughness and fracture energy of concrete, Elsevier, Amsterdam, 1986.

Sab K. et Laalai I., Une approche unifiée des effets d'échelle dans les matériaux quasi fragiles, *C.R. Acad. Sci.*, 316 : 1187-1192, 1993.

Sain T. and Chandre Kishen J.M., Residual fatigue strength assessment of concrete considering tension softening behavior, *International journal of fatigue*, vol.29, pp. 2138-2148, 2007.

Saito M. et Imai S., Direct tensile fatigue of concrete by the use of friction grips, *ACI Journal* 80-42(1983) 431-438.

Saito M., Characteristics of micro-cracking in concrete under static and repeated tensile loading, *Cement and concrete research*, Vol.17, pp. 211-218, 1987.

Sato Y., Matsumoto A. and Knothe K., Review on rail corrugation studies, *Wear* 253(2002) 130-139, 2002.

Santos F.C. et al., Evaluation of subsurface contact stresses in railroad wheels using an elastic half-space model, *J. of the Braz. Soc. Of Mech. Sci. and Eng.*, Vol. 26, No. 4, 2004.

Saulot A., Analyse tribologique du contact roue-rail, Modélisation et expérimentations – Cas de l'usure ondulatoire, Thèse de l'INSA, 2005.

Schlangen E. & Van Mier J.G.M. 1992. Simple lattice model for numerical simulations of fracture of concrete materials and structures, *Materials & Structures (RILEM)*, 25, pp. 534-542.

Schlangen E., Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete. *Heron*, Volume 38, No 2. (PhD Thesis 1993).

Schlagen and Garboczi E.J., New method for simulating fracture using an elastically uniform random geometry lattice, *Int. J. Engng Sci.* Vol. 34, No. 10, pp. 1131-1144, 1996.

Schlagen and Garboczi E.J., Fracture simulations of concrete using lattice models: computational aspects, *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 57, No. 2/3, pp. 319-332, 1997.

Schwab A.L. and Meijaard J.P., Two special finite elements for modelling rolling contact in a multibody environment, The first Asian Conference on Multibody Dynamics 2002, July 31- August 2, 2002, Iwaki, Fukushima, Japan.

Simo J. C., Ju J. W. "Strain and stress based continuum damage models I - Formulation", *Int. J. Solids structures*, 23(7): 821-840, 1987

Sinclair J.C, Allery M.B.P, Developpement of a failure parameter for rail squats, BR Research Report, TM-MF-211, 1991.

Shen Z.Y., Hedrick J.K., Elkins J.A., A comparison of alternative creep force models for rail vehicle dynamic analysis, Proc. Of 8th IASVD Symposium, MIT, Cambridge, August 15-19, 1983.

Sheng X. et al., Simulations of roughness initiation and growth on railway rails, *Journal of Sound and Vibration* 293(2006), 2006.

Sheng X., Li M., Jones C.L.C and Thompson D.J., Using the Fourier-series approach to study interactions between moving wheels and a periodically supported rail, *Journal of Sound and Vibration*, 2007 303, 873-894.

Shevtsov I.Y. et al., Optimal design of wheel profile for railway vehicles, presented at the 6th international conference on contact mechanics and wear of rail-wheel systems, Sweden 2003.

Shi X.P., Fwa T.F. and Tan S.A., Flexural fatigue strength of plain concrete, *ACI Journal* 90-M46(1993) 435-440.

Soua B., *Etude de l'usure et de l'endommagement du roulement ferroviaire avec des modèles d'essieux non-rigides*, thèse de l'ENPC, 1997.

Sperr, W. R., A phenomenological approach to fatigue crack growth rate prediction. *Adv. Res. Struct. Fract. Muter.*, Fatigue 28, 1049-1056, 1977.

- Stevens N.J., Uzumeri S.M. et Collins M.P., Reinforced concrete subjected to reversed cyclic shear- Experiments and Constitutive model, *ACI Journal* 88-16(1991) 135-146.
- Su E.C.M and Hsu T.T.C., Biaxial Compression fatigue and the discontinuity of concrete, *Material Journal of the American Concrete Institute*, Vol 85, No. 3, pp 178-188, 1988.
- Subramaniam K.V., Shah S.P., Biaxial tension fatigue response of concrete, *Cement & Concrete Composites* 25 (2003) 617-623.
- Suda Y. et al., Study on rail corrugation in sharp curves of commuter line, *Wear* 253(2002) 193-198, 2002.
- Suh N. et al., Micropic Observations of wear sheet formation by delamination, *Wear* 28, p 235-249, 1974.
- Sullivan A.M. et Crooker T.W., Analysis of Fatigue crack growth in a high-strength steel – part 1: stress level and stress ratio effets at constant amplitude, *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 98, Issue 2, 1976.
- Taliercio A.L.F. and Gobbi E., Experimental investigation on the triaxial fatigue fatigue behaviour of plain concrete, *Magazine of concrete research*, 1996, 48, No. 176, Sept., 157-172.
- Taliercio A.L.F. and Gobbi E., Fatigue life and change in mechanical properties of plain concrete under triaxial deviatoric cuclic stresses, *Magazine of concrete research*, 1998, 50, No. 3, Sept., 247-255.
- Tassilly E. and Vincent N., A linear model for the corrugation of rails, *Journal of Sound and Vibration* (1991) 150, 25-45, 1991.
- Tassilly E. and Vincent N., Rail corrugations- analytical model and field tests, *Wear* 144(1991) 163-178, 1991.
- Telliskivi T. and Olofsson U., wheel-rail wear simulation, *Wear* 257(2004) 1145-1153, 2004.
- Telliskivi T. et al., A tool and a method for FE analysis of wheel and rail interaction, *Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, Sweden*, 2000.
- Thompson D.J. and Verheij J.W., A double Timoshenko beam model for vertical vibration analysis of railway track et high frequencies , *Journal of Sound and Vibration*, 1999 224(2), 329-348.

- van Mier, J., Schlangen, E. and Vervuurt, A., Lattice type fracture models for concrete. *Continuum Models for Materials with Microstructure*, H.-B. Mühlhaus, ed., John Wiley & Sons, 1995, pp. 341-377.
- van Mier, J. G. M. and van Vliet, M. R. A. Influence of microstructure of concrete on size/scale effects in tensile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 2281-2396, 2003.
- Van Vliet MRA, *Size effect in tensile fracture of concrete and rock*, Ph D thesis, Delft university press, Delft, The Netherlands, 2000.
- Vermeulen P.J, Johnson K.L., Contact of non-spherical elastic bodies transmitting tangential forces, Tans. ASME, Series E, Journal of Applied Mechanics, 31, 338, 1964.
- Vervuurt A H J M, Interface fracture in concrete. PhD thesis, Delf University of Technology, 1997.
- Wiest M. et al., Assessment of methods for calculating contact pressure in wheel-rail/ Switch contact, 7th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail-Wheel Systems, Australia, 2006.
- Williams J.A., Wear modelling: analytical, computational and mapping – a continuum mechanics approach, *Wear* 225-229(1999) 1-17, 1999.
- Wu T.X. and Thompson D.J., The Dynamic behaviour of rail fasteners at high frequencies, Elsevier Science Ltd, 1997.
- Wu T.X., Thompson D.J., An investigation into rail corrugation due to micro-slip under multiple wheel-rail interactions, ISVR, 2002.
- Xiao L. et al., The influence of surface roughness and the contact pressure distribution on friction in rolling/sliding contacts, *Tribology International* 40 (2007) 694-698.
- Yang D., A distribution function for the fatigue life of concrete, *Magazine of concrete research*, 1994, 46, No. 168, Sept., 215-221.
- Zacher M., Prediction of gauge corner cracking in rails for rail maintenance, *Deutsche Bahn AG*, Volckerstr. 5, 80939 Munchen.
- Zhang B., Phillips D.V. and Wu K., Effects of loading frequency and stress reversal on fatigue life of plain concrete, *Magazine of concrete research*, 48, No. 177, 361-375, 1996.

Zhang B., Phillips D.V. and Wu K., Further research on fatigue properties of plain concrete, *Magazine of concrete research*, 1997, 49, No. 180, Sept., 241-252.

Zhang, J., and Knothe, K., Statistical linearization of wheel/rail contact nonlinearities for investigation of curving behavior with random track irregularities, *Vehicle System Dynamics*, Vol. 25, No. Supplement, pp. 731-745, 1996.

Zhang J. and al., Fatigue life prediction of fiber reinforced concrete under flexural load, *International Journal of Fatigue*, 21 (1999) 1033-1049.